

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEIS AMOSTRADOS*

Alberto Adade Filho
CTA-ITA-IEMP

Takashi Yoneyama
CTA-ITA-IEEE

Wladimir Borgest
CTA-ITA-IEEE

Instituto Tecnológico de Aeronáutica
12228-900-São José dos Campos - SP

RESUMO - Em sistemas de controle amostrados, isto é, sistemas em que a planta é contínua e o controlador é discreto no tempo, incertezas paramétricas no modelo da planta não se fazem traduzir em um modelo discretizado com a feição adequada para a aplicação dos principais resultados disponíveis sobre "estabilização quadrática", no que concerne ao projeto de um controlador robusto para o sistema. De fato, ainda há grande escassez de resultados para esse problema. Nesse sentido, este trabalho estende alguns resultados teóricos para o caso de se adotar uma estrutura dinâmica para o controlador e implementa um processo algorítmico de projeto de um controlador discreto que proporciona robustez de estabilidade para incertezas paramétricas estruturadas. É apresentado um exemplo de aplicação do método de projeto.

ABSTRACT - In sampled-data control systems, parametric uncertainties in the model of the plant do not translate adequately for application of some available results about quadratic stabilization, for the design of a robust controller. In fact, only a few results are found in the specialized literature for this problem. In this sense, this work extends some theoretical results for adopting a dynamic controller to the system and reports the implementation of an algorithmic method for design seeking a controller which provides stability robustness for structured parametric uncertainties. Also an application of the method is presented.

1 - INTRODUÇÃO

Vários resultados existentes na literatura especializada sob a denominação de "estabilização quadrática" podem ser

utilizados diretamente no projeto de controladores fixos proporcionando robustez de estabilidade a sistemas sujeitos a incertezas estruturadas de modelo, em sistemas contínuos, como por exemplo, Zhou (1987), Keel *et al.* (1988) e Sezer (1989) ou discretos, como por exemplo, Kolla *et al.* (1989) e Yaz (1988). Entretanto, se o sistema for amostrado, onde a planta é contínua e o controlador discreto no tempo, as perturbações paramétricas no modelo da planta não se fazem traduzir em um modelo discretizado com a feição adequada para a aplicação desses resultados.

Considere-se o sistema de controle amostrado descrito por, planta :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.b)$$

$A : n \times n$; $B : n \times m$; $C : p \times n$; reais.

controlador :

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_{cr} r(k) - B_{cy} y(k) \quad (2.a)$$

$$u(k) = C_c x_c(k) + D_{cr} r(k) - D_{cy} y(k) \quad (2.b)$$

* artigo submetido em 15/03/91

1ª revisão: 26/06/92 2ª revisão: 03/09/92

aceito por recomendação do editor consultor Prof. Dr. Liu Hsu

onde as matrizes $A_c : n_c \times n_c$, B_{cr} , B_{cy} , C_c , D_{cr} e D_{cy} são constantes. Para simplificar a notação, $u(k) := u(kT)$ e $y(k) := y(kT)$.

Discretizando-se (1) com período de amostragem T e considerando-se que as matrizes da planta podem sofrer perturbações em seus valores nominais, tem-se

$$x(k+1) = \exp\{(A + \Delta A) \cdot T\} \cdot x(k) + \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B)u(k) \quad (3.a)$$

$$y(k) = (C + \Delta C) x(k) \quad (3.b)$$

Combinando (2) e (3) para o sistema de malha-fechada homogêneo ($r(k) \equiv 0$):

$$x_{mf}(k+1) = \begin{bmatrix} \exp\{(A + \Delta A) \cdot T\} - \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B)D_{cy}(C + \Delta C) \\ -B_{cy}(C + \Delta C) \\ \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B)C_c \\ A_c \end{bmatrix} x_{mf}(k) \quad (4)$$

onde o estado do sistema de malha-fechada é definido como,

$$x_{mf} := \begin{bmatrix} x' & x'_c \end{bmatrix}'$$

A eq. (4) também pode ser escrita na forma,

$$x_{mf}(k+1) = \begin{bmatrix} \exp\{(A + \Delta A) \cdot T\} & 0 \\ 0 & O_{n_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B) & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix} x_{mf}(k) \quad (5.a)$$

$$=: (\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C) x_{mf}(k) \quad (5.b)$$

Vê-se claramente de (5) que o modelo discretizado experimenta perturbações paramétricas de tipo exponencial, e por essa razão não se encaixa nos modelos de perturbação paramétrica adotados em Kolla (1989) e Yaz (1988), por exemplo.

Ainda há resultados escassos quanto ao estabelecimento de condições para estabilidade robusta do sistema descrito pela eq.(5). Nesse sentido, pode-se ressaltar os trabalhos de Bernstein e Hollot (1989) e em Kienitz (1990). Neste trabalho, seguindo a mesma abordagem apresentada em Bernstein e Hollot (1989) que focaliza essa questão considerando um controlador estático, vai-se estender os resultados lá apresentados para o caso de se ter um controlador dinâmico como

na eq.(2). Adicionalmente, explora-se os resultados obtidos implementando-se um processo algorítmico de projeto e avalia-se o mesmo face a um problema específico de projeto de controlador robusto.

2 - RESULTADOS TEÓRICOS PRINCIPAIS

O sistema dito adjunto de (5b) é,

$$z(k+1) = -(\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C)' z(k) \quad (6)$$

Investigar a estabilidade de (5b) é equivalente a investigar a estabilidade de (6) e vice-versa. Então, pela análise de estabilidade segundo Lyapunov, o sistema em (5) é estável se existir uma matriz P definida-positiva que satisfaça a equação,

$$(\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C) P (\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C)' - P = -Q \quad (7)$$

onde Q é qualquer matriz definida-positiva. Então, (4) é estável se,

$$R := (\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C) P (\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C)' - P < 0 \quad (8)$$

isto é se R for negativa-definida.

Note-se que a matriz $(\Phi + \Gamma \cdot K \cdot C)$ em (4) pode ser escrita alternativamente como,

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\{(A + \Delta A) \cdot T\} & \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy}(C + \Delta C) & C_c \\ -B_{cy}(C + \Delta C) & A_c \end{bmatrix} \quad (9)$$

Usando a identidade fornecida em Van Loan(1978),

$$\begin{bmatrix} \exp\{(A + \Delta A) \cdot T\} & \int_0^T \exp\{(A + \Delta A) \cdot \tau\} d\tau (B + \Delta B) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} A + \Delta A & B + \Delta B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T \right) \quad (10)$$

pode-se re-escrever R em (8) como,

$$R = \begin{Bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{Bmatrix} \cdot \exp \left(\begin{bmatrix} A+\Delta A & B+\Delta B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T \right) \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy}(C+\Delta C) & C_c \\ -B_{cy}(C+\Delta C) & A_c \end{Bmatrix} \cdot P \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy}(C+\Delta C) & C_c \\ -B_{cy}(C+\Delta C) & A_c \end{Bmatrix} \cdot (11)$$

$$\cdot \exp \left(\begin{bmatrix} A+\Delta A & B+\Delta B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T \right) \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{Bmatrix} - P$$

O sistema de eq.(5) estabilidade robusta se R for negativa-definida para todo $(\Delta A, \Delta B, \Delta C) \in U$, onde o conjunto das perturbações paramétricas é definido como,

$$U = \left\{ (\Delta A, \Delta B, \Delta C) : \begin{aligned} \Delta A &= \sum_{i=1}^q \delta_i A_i ; \Delta B = \sum_{i=1}^q \delta_i B_i ; \\ \Delta C &= \sum_{i=1}^q \delta_i C_i ; \sum_{i=1}^q \delta_i^2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

onde A_i, B_i e C_i , refletem a estrutura das incertezas e δ_i é um parâmetro real incerto. Em definições tipo (12), o modelo usual é a caracterização da faixa de incerteza paramétrica, $\delta_i \in [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$. Esta forma de modelar as incertezas pode ser prontamente encaixada em (12) através de escolha das matrizes A_i, B_i e C_i e a redefinição dos parâmetros δ_i (vide seção 4 - EXEMPLO APLICATIVO).

O desenvolvimento que segue é feito considerando-se o caso mais usual em que $\Delta C \equiv 0$.

Seja $\alpha > 0$ dado e defina-se,

$$\bar{A}_\alpha := \left(\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O_{n_c} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} \cdot I \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O_{n_c} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} \cdot I \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^q \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e

$$\pi_P := \begin{Bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{Bmatrix} \cdot P \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Lema 1 : Se $P \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ for definida-positiva e simétrica e $\alpha > 0$, então R, definida por (11), satisfaz,

$$R \leq \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{Bmatrix}' \cdot \text{vec}^{-1} \{ \exp(\bar{A}_\alpha \cdot T) \cdot \text{vec}(\pi_P) \} \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{Bmatrix}' - P \quad (15)$$

$$\forall (\Delta A, \Delta B) \in U$$

As operações de Kronecker e $\text{vec}(\cdot)$ que aparecem nas expressões (13)-(15), estão definidas no Apêndice A.

As provas deste Lema e subsequentes seguem raciocínio desenvolvido em Bernstein e Hollot(1989) para a prova de lemas similares e serão omitidas deste texto por economia de espaço, podendo ser encontradas em Adade Fo.(1991).

Então, se o lado direito de (15) for uma matriz definida-negativa, R também o será e conseqüentemente o sistema de malha-fechada apresentará robustez de estabilidade para as perturbações consideradas.

Forçando-se que

$$\begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{Bmatrix}' \cdot \text{vec}^{-1} \{ \exp(\bar{A}_\alpha \cdot T) \cdot \text{vec}(\pi_P) \} \cdot \begin{Bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{Bmatrix}' - P = -I \quad (16)$$

então, a existência de solução P definida-positiva simétrica para (16) é condição suficiente para que R seja definida-negativa.

A eq. (16) é equivalente a (vide Apêndice B),

$$(M_\alpha - I) \cdot \text{vec}(P) = -\text{vec}(I) \quad (17)$$

onde

$$M_\alpha := \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \right) \cdot \exp(\bar{A}_\alpha \cdot T) \cdot \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{bmatrix} \right) \quad (18)$$

A questão agora é :

Quando é que (17) apresenta solução P definida-positiva ?

Uma resposta é dada no Lema 2 a seguir.

Lema 2: Se existir um $\alpha > 0$ tal que,

$$\rho(M_\alpha) < 1 \quad (19)$$

então (17) tem uma solução P definida-positiva, onde $\rho(M_\alpha)$ denota o raio espectral da matriz M_α .

Se $\alpha \approx 0$ e não houver incertezas (isto é, $\Delta A = 0$ e $\Delta B = 0$), pode-se mostrar que,

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \exp(A \cdot T) - \int_0^T \exp(A \cdot \tau) d\tau \cdot B \cdot D_{cy} \cdot C \\ -B_{cy} \cdot C \\ \int_0^T \exp(A \cdot \tau) d\tau \cdot B \cdot C_c \\ A_c \end{bmatrix} \otimes \quad (20)$$

$$\otimes \begin{bmatrix} \exp(A \cdot T) - \int_0^T \exp(A \cdot \tau) d\tau \cdot B \cdot D_{cy} \cdot C \\ -B_{cy} \cdot C \\ \int_0^T \exp(A \cdot \tau) d\tau \cdot B \cdot C_c \\ A_c \end{bmatrix}$$

Cada termo no produto de Kronecker em (20) é a matriz do sistema de malha-fechada nominal. Como este é estável por hipótese, e pelo fato que os autovalores de um produto de Kronecker de duas matrizes são os autovalores dessas duas matrizes (Brewer, 1978), então todos os autovalores de M_α em (20) situam-se dentro do círculo unitário e portanto $\rho(M_\alpha) < 1$. Assim, a condição (19) é sempre satisfeita para um α suficientemente pequeno, se o sistema nominal for estável e não houver incertezas.

3 - ABORDAGEM DE PROJETO PARA ROBUSTEZ DE ESTABILIDADE

Para se usar o resultado do Lema 2 no projeto de um sistema de controle com estabilidade robusta, os passos de uma abordagem poderiam ser:

i) obter,

$$K = \begin{bmatrix} -D_{cy} & C_c \\ -B_{cy} & A_c \end{bmatrix} \quad (21)$$

um controlador que estabilize o sistema nominal; por exemplo, através de um projeto LQG para a planta discretizada onde então,

$$A_c = \bar{A} - \bar{B}K - F\bar{C} \quad (22.a)$$

$$B_{cy} = F \quad (22.b)$$

$$C_c = K \quad (22.c)$$

$$D_{cy} = 0 \quad (22.d)$$

e K e F são as matrizes de realimentação do estado estimado e do filtro, respectivamente, no formalismo de um problema LQG.

- ii)
- Escolher $\alpha > 0$ tentativa;
 - Montar A_α de (13);
 - Calcular $\exp(A_\alpha \cdot T)$;
 - Montar M_α de (18);

e) Determinar o raio espectral da matriz M_α ,

$$\rho(M_\alpha) := \max_i |\lambda_i(M_\alpha)| \quad (23)$$

Caso $\rho(M_\alpha) < 1$ então seguramente esse controlador proporciona ao sistema de malha-fechada estabilidade robusta para as incertezas consideradas. Caso $\rho(M_\alpha) \geq 1$, então iteragir em α voltando ao passo (ii.a); não se achando $\alpha > 0$ tal que (19) seja satisfeita, então iteragir em K , voltando ao passo (i).

É interessante observar que não há necessidade de se determinar P ; o critério de estabilidade robusta está formulado só em termos de quantidades fixas dadas.

Implementou-se um programa computacional de projeto de acordo com a abordagem apresentada acima. Através desse programa, efetua-se um projeto algorítmico do controlador (21)-(22) proporcionando robustez de estabilidade para o sistema amostrado. Os parâmetros de projeto são os elementos da diagonal principal da matriz de ponderação de estado, no projeto da realimentação de estado, e os elementos da diagonal principal da matriz de covariância do ruído de medida fictício, no projeto do filtro, assumindo-se ambas as matrizes diagonais. O algoritmo utilizado no processo iterativo é o chamado "processo das fronteiras móveis" (Zakian, 1973), com alguns aprimoramentos (Adade Fo., 1991). Usa-se adicionalmente uma busca de Fibonacci (Kuester, 1973) para localizar um valor de α que minimiza $\rho(M_\alpha)$ em (23), no decorrer do passo (ii). Na fig. 1 tem-se um fluxograma deste programa. A extensão deste para considerar imposições adicionais de projeto é imediata.

4 - EXEMPLO APLICATIVO

Considere-se, para fins de ilustração, um modelo de segunda-ordem para a planta, bastante utilizado para projeto em muitas aplicações:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Admitindo-se que as faixas de incerteza nos parâmetros J , K , e B são $J \in [0,7; 1,3]$, $K \in [-0,1; 0,1]$, $B \in [-0,1; 0,1]$ e assumem valores nominais $J = 1$, $K = 0$, $B = 0$, tem-se então que $1/J \in [0,769; 1,4286]$, $K/J \in [-0,130; 0,130]$ e $B/J \in [-0,130; 0,130]$. Dessa forma, a estrutura de perturbações paramétricas (vide eq.(12)) associada pode ficar,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \delta_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pois $\delta_1 \in [-0,26; 0,26]$, $\delta_2 \in [-0,462; 0,8572]$ e $\delta_3 \in [-0,26; 0,26]$.

O modelo da planta só não é externamente instável em malha aberta, quando os parâmetros K e B são ambos positivos.

Seja o período de amostragem $T = 0,02$. Para este problema, foi encontrado o seguinte controlador robusto, utilizando-se o programa desenvolvido:

$$\begin{bmatrix} A_c & B_{cy} \\ C_c & D_{cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02083 & 0,01853 & 1,01795 \\ -1,27183 & 0,85325 & 0,98347 \\ 14,41799 & 7,33761 & 0 \end{bmatrix}$$

Deve ser razoavelmente evidente que a possibilidade de se achar solução viável dependerá da estrutura das perturbações paramétricas e mesmo do período de amostragem utilizado. Por exemplo, para $T = 0,1$ o programa não conseguiu achar uma solução viável, como não achou para $T = 0,02$ com o dobro da variação paramétrica considerada acima.

Outra dificuldade na obtenção de uma solução viável tem raiz no algoritmo de busca utilizado, cuja convergência para uma região viável, supondo-se que existam, depende de certos fatores, como o valor inicial estipulado para o vetor de parâmetros de projeto. A interação do projetista com o programa torna-se então fundamental para a avaliação e ajustes do algoritmo.

5 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Este trabalho desenvolve um método algorítmico de projeto de controladores robustos para sistemas lineares multivariáveis amostrados. Este método permite considerar as incertezas paramétricas no modelo da planta contínua, diretamente no projeto do controlador discreto; ainda são escassos os resultados disponíveis e utilizáveis para projeto, nesse tipo de problema.

Uma dificuldade prática na abordagem apresentada reside no grande aumento da dimensionalidade das matrizes de trabalho com a ordem do sistema, devido as operações de Kronecker que aparecem nas expressões (13)-(18); o impacto disto não é somente na memória computacional utilizada mas principalmente no tempo computacional de projeto, pois cada iteração leva um tempo razoável se necessitar processar matrizes de ordem elevada. No exemplo aplicativo de ordem 2 apresentada, a dimensão de M_α é 16×16 . Algoritmos eficientes e robustos bem como computadores de maior capacidade são então desejáveis para a implementação do método.

Enfatiza-se que (19) é somente uma condição suficiente e, portanto, na incapacidade do programa desenvolvido para projeto achar uma solução viável (controlador robusto) para um determinado problema isto não significa que não exista; outros meios deveriam então ser tentados.

É pertinente um comentário final sobre o uso de condições suficientes para robustez de estabilidade, como neste trabalho. Os teoremas de estabilidade de Lyapunov constituem-se em condições necessárias e suficientes quando o sistema em questão é linear. Isto é, as eqs. (7) e (8) são condições necessárias e suficientes, pois assumiu-se que os modelos são lineares. Então, o sistema é estável se e só se R em (11) for

negativa-definida para todo $(\Delta A, \Delta B, \Delta C) \in U$. A aplicação direta dos resultados sobre estabilização quadrática para a estabilização robusta do sistema envolveria então a determinação de $(A_c, B_{cy}, C_c, D_{cy})$ e conseqüentemente P definida-positiva, tais que R em (11) fosse negativa-definida para todos os valores possíveis de $(\Delta A, \Delta B, \Delta C) \in U$. A dimensionalidade deste problema torna impraticável tal solução direta. Redução na dimensionalidade do problema pode ser obtida abdicando-se da condição necessária, isto é, trabalhando-se alternativamente com condições relativamente mais simples que, se satisfeitas, impliquem em $R < 0$, ou seja, condições suficientes. É o caso de (15)-(16). Note-se que A_α depende da estrutura das perturbações paramétricas (A_i, B_i) e não diretamente das incertezas paramétricas δ_i , como é o caso de R.

AGRADECIMENTO

Agradecemos ao Dr. Engin Yaz da Univ. de Arkansas USA, que trouxe ao nosso conhecimento o trabalho (Bernstein e Hollot, 1989), através de comunicação pessoal.

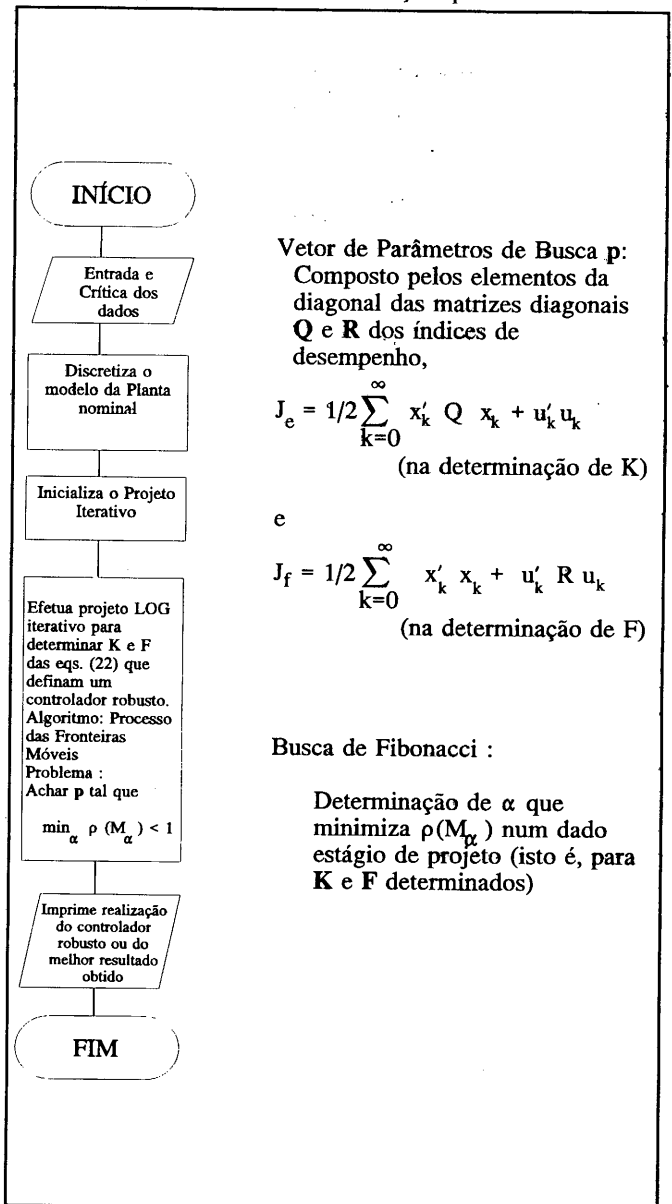


Figura 1 - Fluxograma do programa de projeto

REFERÊNCIAS

Adade Fo.,A., 1991, Projeto de Sistema de Controle Multivariáveis Robustos Utilizando Otimização Multicritérios. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA-IEEE, S. José dos Campos - SP.

Bernstein, D.S. e C.V. Hollot, 1989, "Robust Stability for Sampled-Data Control Systems". In : Proc.ACC, p. 2834-9.

Brewer, J.W., 1978, "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory" IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS- 25 (9) : 772-81.

Keel, L.H. *et al.*, 1988, "Robust Control with Structured Perturbations." IEEE Trans. on Automatic Control, 33 (1) : 68-78.

Kienitz, K.H., 1990, "Stabilization of Uncertain Discrete Systems." Doctor of Tecnical Sciences Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.

Kolla, S.R. *et al.*, 1989, "Robust Stability Bounds on Time-Varying Perturbations for State-Space Models of Linear Discrete-Time Systems". International J. of Control, 50 (1): 151-9.

Kuester, J.L. e J.H. Mize, 1973, "Optimization Techniques With FORTRAN". New York, McGraw-Hill, p. 286-294.

Sezer, M.E. e D.D. Siljak, 1989, "A Note on Robust Stability Bounds". IEEE Trans. on Automatic Control, 34(11) : 1212-5.

Van Loan, C.F., 1978, "Computing Integrals Involving the Matrix Exponential". IEEE Trans. on Automatic Control, Ac-23 (3) : 395-404.

Yaz, E., 1988, "Deterministic and Stochastic Robustness Measures for Discrete Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, 33 (10) : 952-5.

Zakian, V.U. Al-Naib, 1973, "Design of Dynamical and Control Systems By the Method of Inequalities". Proc. IEE, 120(11): 1421-7.

Zhou, K. e P.P. Khargonekar, 1987, "Stability Robustness Bounds for Linear State-Space Models with Structured Uncertainty". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-32(7): 621-3.

APÊNDICE A

O produto de Kronecker de duas matrizes $X (p \times q)$ e $Y (m \times n)$ é uma matriz $(p \cdot m \times q \cdot n)$ definida por,

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11} \cdot Y & x_{12} \cdot Y & \dots & x_{1q} \cdot Y \\ x_{21} \cdot Y & x_{22} \cdot Y & \dots & x_{2q} \cdot Y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} \cdot Y & x_{p2} \cdot Y & \dots & x_{pq} \cdot Y \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Se $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $Y \in \mathbb{R}^{s \times s}$, então, por definição, a soma de Kronecker é dada por,

$$X \oplus Y = X \otimes I_s + I_r \otimes Y \quad (\text{A.2})$$

Se os produtos indicados existirem, então

$$\text{vec}(X \cdot Y \cdot Z) = (Z' \otimes X) \cdot \text{vec}(Y) \quad (\text{A.3})$$

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (X \cdot Z) \otimes (Y \cdot W) \quad (\text{A.4})$$

onde vec indica operação de empilhamento em coluna:

$$\text{vec}(Y) \quad (m \cdot n \times 1) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}; \quad Y_i \text{ é a } i\text{-ésima coluna de } Y.$$

Se X for quadrada, então

$$e^{X \oplus X} = e^X \otimes e^X \quad (\text{A.5})$$

Estas expressões e outras com produtos de Kronecker podem ser encontradas em Brewer(1978).

APÊNDICE B

Vai-se mostrar a equivalência entre (16) e (17). Usando-se (A.3) em (16), tem-se

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \text{vec}^{-1} \{S \cdot \text{vec}(P)\} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}' = -I + P$$

onde

$$S := \exp(\overline{A}_\alpha \cdot T) \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{cy} \cdot C & C_c \\ -B_{cy} \cdot C & A_c \end{bmatrix} \right\}$$

Aplicando vec a ambos os membros e usando (A.3),

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \right) \cdot S - I \right\} \text{vec}(P) = -\text{vec}(I)$$

Mas de (18),

$$M_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \otimes \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \right\} \cdot S$$

e tem-se então a eq. (17).