
UM CONTROLADOR DUAL SUB-ÓTIMO PARA SISTEMAS COM PARÂMETROS ESTOCÁSTICOS NÃO-LINEARES

Takashi Yoneyama

André Laurindo Maitelli

Departamento de Controle e Conversão de Energia

Divisão de Engenharia Eletrônica

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

CTA-ITA-IEE-IEEE

12.228-900 - São José dos Campos - SP.

RESUMO Este trabalho apresenta um controlador subótimo dual para a classe de sistemas lineares com variações paramétricas não-lineares. A função perda a ser minimizada consiste na soma das variâncias da saída em torno de um valor de referência em dois passos futuros no tempo. São utilizados preditores ótimos para a estimação da saída futura necessária ao cálculo do sinal de controle a cada passo. O desempenho do controlador de dois estágios é mostrado por intermédio de um exemplo.

ABSTRACT A suboptimal dual controller is presented for a class of linear systems with nonlinear parameter variations. The loss function to be minimized consists of the sum of outputs variances two steps ahead in time. An optimal predictor is used to estimate the future outputs which are required to compute the control signal in each step. The behavior of the two-stage controller is illustrated by one example.

1 - INTRODUÇÃO

Muitos controladores duais subótimos tem sido desenvolvidos para sistemas lineares com parâmetros estocásticos lineares ou com parâmetros contendo componentes ruidosos (Wittenmark 1975; Witteemark & Elevitch 1985; Milito *et alii* 1982; Ishihara *et alii* (1988); Tse *et alii* 1973). Este trabalho mostra um controlador para sistemas lineares com parâmetros estocásticos não-lineares, frequentemente encontrado em situações práticas.

* Artigo submetido em 04-11-92

1ª revisão em 08-02-93; 2ª revisão em 03-08-93;

Aceito sob recomendação do Ed.Cons. Prof.Dr. Liu Hsu

Usando o princípio de separação mostrado em Bar-Shalom e Tse (1974), o problema de controle pode ser dividido em duas partes: estimação dos parâmetros e controle do sistema. No caso, a estimação é feita através do filtro estendido de Kalman, usando uma linearização em torno da estimativa atual dos parâmetros.

O controlador proposto tem característica dual, ou seja, se preocupa em realizar duas tarefas conflitantes. Primeiro, a ação de controle é escolhida para minimizar o desvio da saída de um valor de referência. Segundo, o sinal de controle ajuda a obter mais e melhor informação sobre os parâmetros desconhecidos do sistema. Assim, o sinal de controle é calculado para minimizar o desvio da saída nos dois passos seguidos à sua aplicação no sistema.

A maior dificuldade para o cálculo do sinal de controle é a necessidade da avaliação da saída futura à aplicação do mesmo, introduzida quando tenta-se melhorar a saída dois passos adiante. Para solucionar isto, a saída futura é substituída pelo seu valor ótimo predito.

2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um modelo ARX, uma entrada e uma saída, com parâmetros estocásticos, descrito por

$$y(k) + a_1(k)y(k-1) + \dots + a_m(k)y(k-m) = b_1(k)u(k-1) + \dots + b_n(k)u(k-n) + e(k) \quad (2.1)$$

onde $y(k)$ é a saída, $u(k)$ é a entrada ou sinal de controle e $\{e(k), k=0,1,\dots\}$ é uma sequência de variáveis Gaussianas, independentes e identicamente distribuídas com média zero e desvio padrão σ .

Introduzindo o vetor coluna

$$x(k) = [a_1(k) \ a_2(k) \ \dots \ a_m(k) | b_1(k) \ b_2(k) \ \dots \ b_n(k)]^T$$

e assumindo que os parâmetros são representados como um processo estocástico não-linear

$$x(k+1) = f(x(k), k, v(k)) \quad (2.2)$$

onde $\{v(k), k=0,1,\dots\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias Gaussianas, independentes e identicamente distribuídas com média zero e matriz de covariância R_1 . Os processos $e(k)$ e $v(k)$ são considerados independentes. A distribuição de $x(0)$ é gaussiana com média $\hat{x}(0)$ e matriz de covariância $P(0)$, que são conhecidas *a priori* e independentes dos ruídos.

Definindo o vetor linha

$$\theta(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ \dots \ -y(k-m) | u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n)]$$

a equação (2.1) pode ser escrita como

$$y(k) = \theta(k)x(k) + e(k) \quad (2.3)$$

O propósito do controle é minimizar a variância da saída em torno de um valor de referência constante, y_r , em M passos de controle,

$$V = E \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y(k+i) - y_r)^2 \right\} \quad (2.4)$$

A minimização de (2.4) é feita com respeito à $u(k)$, ..., $u(k+M-1)$ e a solução pode ser determinada, em princípio, pelo algoritmo de programação dinâmica. Como o mesmo requer um grande esforço computacional em termos de memória e tempo requeridos, sua aplicação em tempo real é impossibilitada. Por isso, diversos controladores subótimos baseados em uma simplificação do funcional V da equação (2.4) foram desenvolvidos (Wittenmark 1975; Ishihara *et alii* 1988; Milito *et alii* 1982; Wittenmark & Elevitch 1985).

O controlador de dois estágios proposto usa a seguinte função custo

$$V_1 = \frac{1}{2} E \{ (y(k+1) - y_r)^2 + (y(k+2) - y_r)^2 | Y_k \} \quad (2.5)$$

onde

$$Y_k = \{y(k), y(k-1), \dots, y(0), u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)\}$$

3 - IDENTIFICAÇÃO EM TEMPO REAL

Para fazer o controle do sistema (2.1), é necessário realizar uma estimação em tempo real dos parâmetros do sistema, que são desconhecidos e variáveis com o tempo. O filtro de Kalman nos dá uma solução simples para o problema de estimação de parâmetros em sistemas com variações paramétricas lineares. Para problemas não-lineares o filtro de Kalman não é estritamente aplicável. O filtro estendido de Kalman supera esta dificuldade usando uma linearização aproximada, feita em torno do vetor de parâmetros estimados atual.

Seja $\hat{x}(k)$ a estimativa do vetor de parâmetros $x(k)$ no instante k . Linearizando a equação de variação paramétrica não-linear (2.2) em torno de $x(k) = \hat{x}(k)$ and $v(k) = 0$, temos a equação aproximada de $x(k+1)$

$$x(k+1) = f(\hat{x}(k), k, 0) + F(k)[x(k) - \hat{x}(k)] + G(k)v(k) \quad (3.1)$$

onde

$$F(k) = \left. \frac{\partial f(x(k), k, v(k))}{\partial x(k)} \right|_{x(k) = \hat{x}(k), v(k) = 0}$$

$$G(k) = \left. \frac{\partial f(x(k), k, v(k))}{\partial v(k)} \right|_{x(k) = \hat{x}(k), v(k) = 0}$$

Podemos escrever as equações do filtro de Kalman para a equação linearizada (3.1). O vetor de parâmetros estimados $\hat{x}(k+1)$ e a matriz de covariância $P(k+1)$ são obtidas através das equações do filtro estendido de Kalman

$$\hat{x}(k+1) = f(\hat{x}(k), k, 0) + K(k) [y(k) - \theta(k)\hat{x}(k)] \quad (3.2)$$

$$K(k) = [F(k)P(k)\theta^T(k)] [\theta(k)P(k)\theta^T(k) + \sigma^2]^{-1} \quad (3.3)$$

$$P(k+1) = [F(k) - k(k)\theta(k)] P(k)F^T(k) + G(k)R_1G^T(k) \quad (3.4)$$

4 - CÁLCULO DO SINAL DE CONTROLE

Nesta seção será apresentada a expressão do sinal de controle $u(k)$, que é a solução do problema de minimização da função custo (2.5).

A equação (2.5) pode ser escrita como

$$V_1 = \frac{1}{2} E \{ (y(k+1) - y_r)^2 | Y_k \} + \frac{1}{2} E \{ (y(k+2) - y_r)^2 | Y_k \} \quad (4.1)$$

A equação (2.3) fornece

$$y(k+1) = \theta(k+1)x(k+1) + e(k+1) \quad (4.2)$$

$$y(k+2) = \theta(k+2)x(k+2) + e(k+2) \quad (4.3)$$

onde

$$\theta(k+1) = [-y(k) \ -y(k-1) \ \dots \ -y(k+1-m) | u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k+1-n)] \quad (4.4)$$

$$\theta(k+2) = [-y(k+1) \ -y(k) \ \dots \ -y(k+2-m) | u(k+1) \ u(k) \ \dots \ u(k+2-n)] \quad (4.5)$$

O primeiro termo de (4.1) pode ser calculado através do uso de fórmulas estatísticas padrões e das equações (4.2) e (4.4)

$$E \{ (y(k+1) - y_r)^2 | Y_k \} = (\theta(k+1)\hat{x}(k+1) - y_r)^2 + \theta(k+1)P(k+1)\theta^T(k+1) + \sigma^2 \quad (4.6)$$

O vetor de informação $\theta(k+2)$ em (4.3) contém a saída futura $y(k+1)$, que será substituída pela sua predição ótima $y^P(k+1)$. Então,

$$\theta(k+2) = [-y^P(k+1) \ -y(k) \ \dots \ -y(k+2-m) | u(k+1) \ u(k) \ \dots \ u(k+2-n)] \quad (4.7)$$

onde

$$y^P(k+1) = E \{ y(k+1) | Y_k \} = \theta(k+1)\hat{x}(k+1) \quad (4.8)$$

A equação (4.3) pode ser escrita como

$$E\{(y(k+2)-y_r)^2 | Y_k\} = E\{y^2(k+2) | Y_k\} - \frac{2}{2} E\{y(k+2) | Y_k\} y_r + y_r^2 \quad (4.9)$$

A partir da equação aproximada (3.1), temos

$$x(k+2) \cong F(k+1)x(k+1) + G(k+1)v(k+1) + f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) - F(k+1)\hat{x}(k+1) \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.3) segue que

$$y(k+2) \cong \theta(k+2)[F(k+1)x(k+1) + G(k+1)v(k+1) + f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) - F(k+1)\hat{x}(k+1)] + e(k+2) \quad (4.11)$$

onde $\theta(k+2)$ é dado por (4.7)

Por outro lado, tem-se que

$$E\{y(k+2) | Y_k\} \cong \theta(k+2) f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) \quad (4.12)$$

e

$$E\{y^2(k+2) | Y_k\} \cong \theta(k+2)F(k+1)P(k+1)F^T(k+1)\theta^T(k+2) + \sigma^2 + \theta(k+2)f(\hat{x}(k+1), k+1, 0)f^T(\hat{x}(k+1), k+1, 0) + \theta(k+2)G(k+1)R_1G^T(k+1)\theta^T(k+2) \quad (4.13)$$

Usando (4.13) e (4.12), a equação (4.9) nos dá

$$E\{(y(k+2)-y_r)^2 | Y_k\} \cong (\theta(k+2)f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) - y_r)^2 + \sigma^2 + \theta(k+2)F(k+1)P(k+1)F^T(k+1)\theta^T(k+2) + \theta(k+2)G(k+1)R_1G^T(k+1)\theta^T(k+2) \quad (4.14)$$

Finalmente, usando (4.6) e (4.14) a expressão de V_1 é

$$V_1 \cong \frac{1}{2} \{ (\theta(k+1)\hat{x}(k+1) - y_r)^2 + \theta(k+1)P(k+1)\theta^T(k+1) + 2\sigma^2 + (\theta(k+2)f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) - y_r)^2 + \theta(k+2)F(k+1)P(k+1)F^T(k+1)\theta^T(k+2) + \theta(k+2)G(k+1)R_1G^T(k+1)\theta^T(k+2) \} \quad (4.15)$$

Definindo os vetores

m-ésima posição

$$\begin{aligned} l_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \\ l_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \\ l_3 &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(k+1) &= [-y(k) \ -y(k-1) \ \dots \ -y(k+1-m) \ | \ 0 \ u(k-1) \ \dots \ u(k+1-n)] \\ \tilde{\theta}(k+2) &= [0 \ -y(k) \ \dots \ -y(k+2-m) \ | \ 0 \ 0 \ \dots \ u(k+2-n)] \end{aligned}$$

podemos escrever (4.4) e (4.7) como, respectivamente

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \tilde{\theta}(k+1) + l_2 u(k) \\ \theta(k+2) &= \tilde{\theta}(k+2) - l_1 \tilde{\theta}(k+1) \hat{x}(k+1) + [l_3 - l_1 l_2 \hat{x}(k+1)] u(k) + l_2 u(k+1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \hat{z}(k+1) &= f(\hat{x}(k+1), k+1, 0) \\ Q(k+1) &= F(k+1)P(k+1)F^T(k+1) + G(k+1)R_1G^T(k+1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_1 &= [\tilde{\theta}(k+2) - l_1 \tilde{\theta}(k+1) \hat{x}(k+1)] \hat{z}(k+1) - y_r \\ k_2 &= l_3 \hat{z}(k+1) - l_1 l_2 \hat{x}(k+1) \hat{z}(k+1) \\ k_3 &= l_2 \hat{z}(k+1) \\ W_1 &= \tilde{\theta}(k+2) - l_1 \tilde{\theta}(k+1) \hat{x}(k+1) \\ W_2 &= l_3 - l_1 l_2 \hat{x}(k+1) \end{aligned}$$

A equação da função custo V_1 (4.1) torna-se

$$V_1 = \frac{1}{2} [a u(k) + b u(k+1) + c u(k)u(k+1) + d u^2(k) + e u^2(k+1)] + \text{termos independentes} \quad (4.18)$$

onde os coeficientes a,b,c,d, e são dados por

$$\begin{aligned} a &= 2[K_1 K_2 + W_1 Q(k+1)W_2^T + \tilde{\theta}(k+1)\hat{x}(k+1) \hat{x}_{m+1}^T(k+1) - \hat{x}_{m+1}^T(k+1) y_r + l_2 P(k+1) \tilde{\theta}^T(k+1)] \\ b &= 2[K_1 K_3 + W_1 Q(k+1) l_2^T] \\ c &= 2[K_2 K_3 + l_2 Q(k+1) W_2^T] \\ d &= K_2^2 + W_2 Q(k+1)W_2^T + x_{m+1}^2(k+1) + P_{m+1,m+1}(k+1) \\ e &= K_3^2 + l_2 Q(k+1)l_2^T \end{aligned}$$

As derivadas parciais de V_1 com relação a $u(k)$ e $u(k+1)$ são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial u(k)} &= \frac{1}{2} [a + c u(k+1) + 2 d u(k)] \\ \frac{\partial V_1}{\partial u(k+1)} &= \frac{1}{2} [b + c u(k) + 2 e u(k+1)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

e o gradiente de V_1 é

$$\nabla V_1 = \left[\frac{\partial V_1}{\partial u(k)} \quad \frac{\partial V_1}{\partial u(k+1)} \right]^T \quad (4.20)$$

A minimização de (4.18) é o ponto $(u(k), u(k+1))$ onde o gradiente é igual a $[0 \ 0]^T$. Então

$$u(k) = \frac{2e a - b c}{c^2 - 4 e d} \quad (4.21)$$

$$u(k+1) = \frac{2 b d - a c}{c^2 - 4 e d} \quad (4.22)$$

Porém, somente o sinal de controle $u(k)$ dado por (4.21) será aplicado ao sistema no instante k . O valor de $u(k+1)$ somente será necessário no instante $k+1$, quando será calculado através da equação (4.21), usando informações adicionais resultantes da aplicação de $u(k)$ no instante k .

O algoritmo é de fácil implementação em um computador e o esforço computacional é bastante modesto.

5 - SIMULAÇÃO

O desempenho do controlador subótimo dual de dois estágios proposto será ilustrado através de um exemplo. Serão feitas comparações com controlador de um estágio (cauteloso).

Considere o sistema de primeira ordem

$$y(k) + a(k) y(k-1) = b(k)u(k-1) + e(k) \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} a(k+1) &= -0.9 \\ b(k+1) &= \text{sen}(b(k)) + v(k) \end{aligned}$$

Os ruídos $e(k)$ e $v(k)$ tem média zero e desvio padrão 0.5. O valor de referência é igual a 1.0. As condições iniciais são:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 \\
x(0) &= [a(0) \ b(0)]^T = [-0.9 \ 0]^T \\
\hat{x}(0) &= [\hat{a}(0) \ \hat{b}(0)]^T = [0 \ 0]^T \\
p_{aa}(0) &= p_{bb}(0) = 30 \ ; \ p_{ab}(0) = p_{ba}(0) = 0
\end{aligned}$$

Os resultados de 50 simulações são mostrados na tabela 1. Pode-se verificar que o controlador proposto é melhor que o controlador de um estágio, que consiste na minimização da seguinte função perda

$$V_3 = E\{(y(k+1) - y_r)^2 | Y_k\} \quad (5.2)$$

ou seja, considera a saída somente um estágio adiante.

A expressão do sinal de controle que minimiza (5.2) contém em seu denominador somente a covariância do parâmetro b_1 ($p_{b_1b_1}$), mostrando que o mesmo é o mais crítico, ou seja, deve ter uma precisão melhor. Por isso, neste exemplo usa-se o valor médio da covariância de b (p_{bb}) como medida da qualidade da estimação dos parâmetros. Para avaliar o desempenho dos controladores são feitas NS simulações, cada uma consistindo de NP passos. Assim, o valor médio de p_{bb} é dado por

$$\bar{p}_{bb} = \frac{1}{NS} \left\{ \sum_{j=1}^{NS} \frac{1}{NP} \left[\sum_{i=1}^{NP} p_{bb}(i) \right] \right\} \quad (5.3)$$

A perda média por passo, que mede a qualidade do controle é dada por

$$\bar{V} = \frac{1}{NS} \left\{ \sum_{j=1}^{NS} \frac{1}{NP} \left[\sum_{i=1}^{NP} (y(i) - y_r)^2 \right] \right\} \quad (5.4)$$

Tabela 1 - Resultados da simulação de Monte Carlo do sistema (5.1). Foram feitas 50 simulações, cada uma consistindo de 400 passos para cada lei de controle.

| LEI DE CONTROLE | PERDA MÉDIA POR PASSO | VALOR MÉDIO DE p_{bb} |
|----------------------------|-----------------------|-------------------------|
| Um-estágio | 1.640 | 3.954 |
| Dois-estágios com predição | 1.329 | 1.861 |

As figuras 1 e 2 mostram o resultado de uma simulação do sistema (5.1) utilizando a mesma sequência de ruído, com o controlador de um e de dois estágios, respectivamente. Pode-se verificar a melhora da estimação do parâmetro variável $b(k)$ quando se usa o controlador de dois estágios, levando a um controle global melhor do sistema.

6 - CONCLUSÕES

O controlador de dois estágios para sistemas com parâmetros estocásticos não-lineares é discutido no presente trabalho. O mesmo apresenta característica dual, ou seja, se preocupa não só com o controle imediato, mas também com a estimação futura dos parâmetros do sistema, produzindo um controle melhor.

A estimação é feita através do filtro estendido de Kalman, usando uma linearização em torno da estimativa corrente. Devido à aproximação linear feita, o filtro pode divergir. Várias soluções para isto tem sido propostas, incluindo refinamento iterativo da linearização.

O controlador não requer o ajuste de parâmetros, tais como fator de peso da estimação em Wittenmark (1975) e em Wittenmark & Elevitch (1985), o que se constitui em uma vantagem, pois este ajuste pode ser crucial em alguns casos.

Outra vantagem é a solução analítica para o sinal de controle, dispensando algoritmos de minimização, que normalmente requerem um grande esforço computacional, limitando aplicação em tempo real.

AGRADECIMENTOS: O autor André L. Maitelli agradece à UFRN e CAPES/PICD pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Åstrom, K.J. & Wittenmark, B., (1989). *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Bar-Shalom, Y. & Tse, E., (1974). Dual effect, certainly equivalence and separation in stochastic control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-19, pp. 494-500.
- Ishihara, T., Abe, K.I. & Takeda, (1988). Extensions of innovations dual control. *Int. J. Systems Sci*, Vol. 19, No 4, pp 653-667.
- Milito, R., Padilha, S. & Cadorin, D., (1982). An innovations approach to dual control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, No 1, pp. 132-137.
- Tse, E., Bar-Shalom, Y. & Meier L., (1973). Wide-sense adaptive dual control for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-18, N°2, pp 98-108.
- Wittenmark, B., (1975). An active suboptimal dual controller for systems with stochastic parameters. *Automatic Control Theory and Applications*, Vol. 3, No 1, pp. 13-19.
- Wittenmark, B. & Elevitch, C., (1985). *An adaptive control algorithm with Systems Parameters Estimation* (York, UK), pp. 587-592.

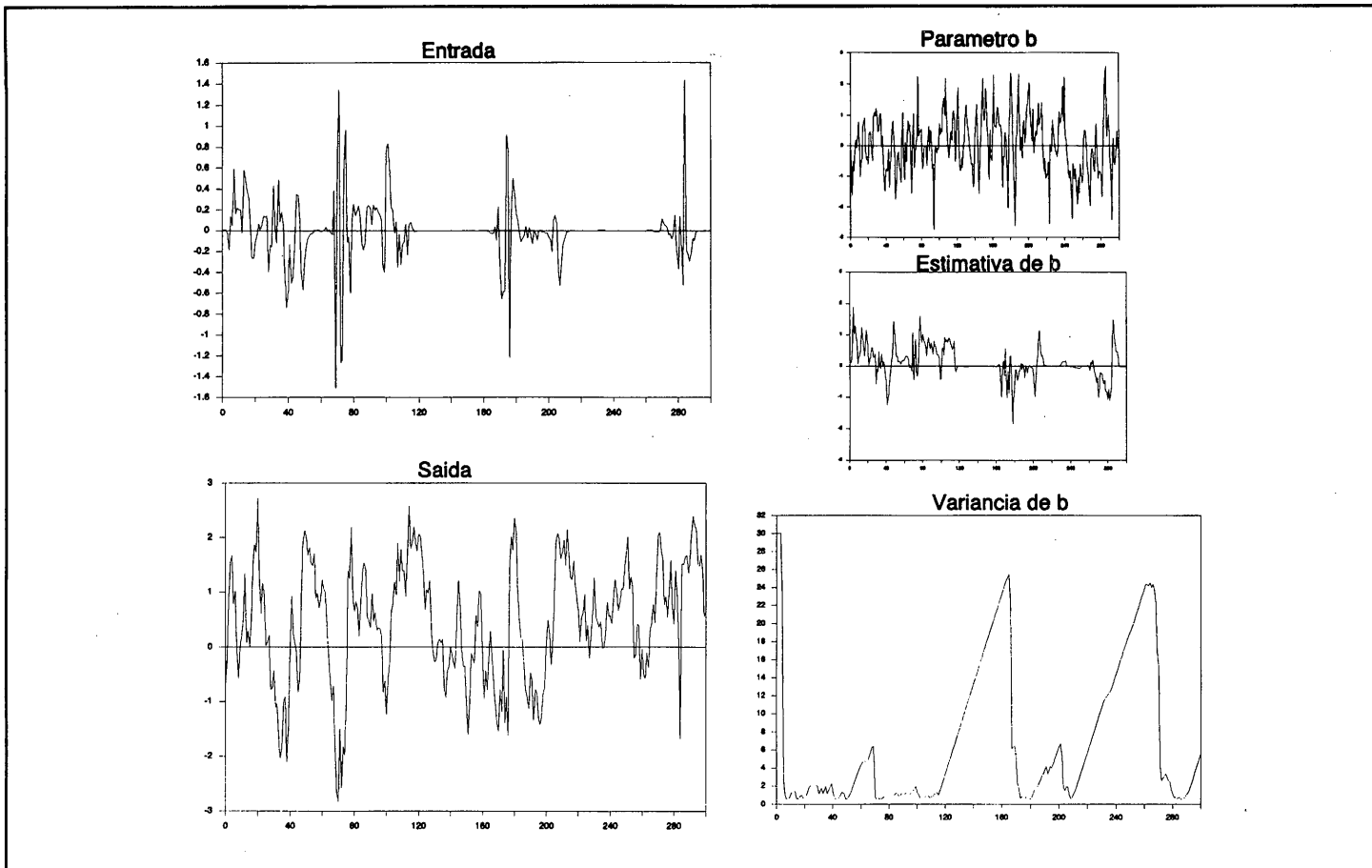


Figura 1 - Simulação do sistema (5.1) com o controlador de um estágio. Ocorre o desligamento do sinal de controle (*Turn-off*), fazendo com que não haja identificação durante o mesmo.

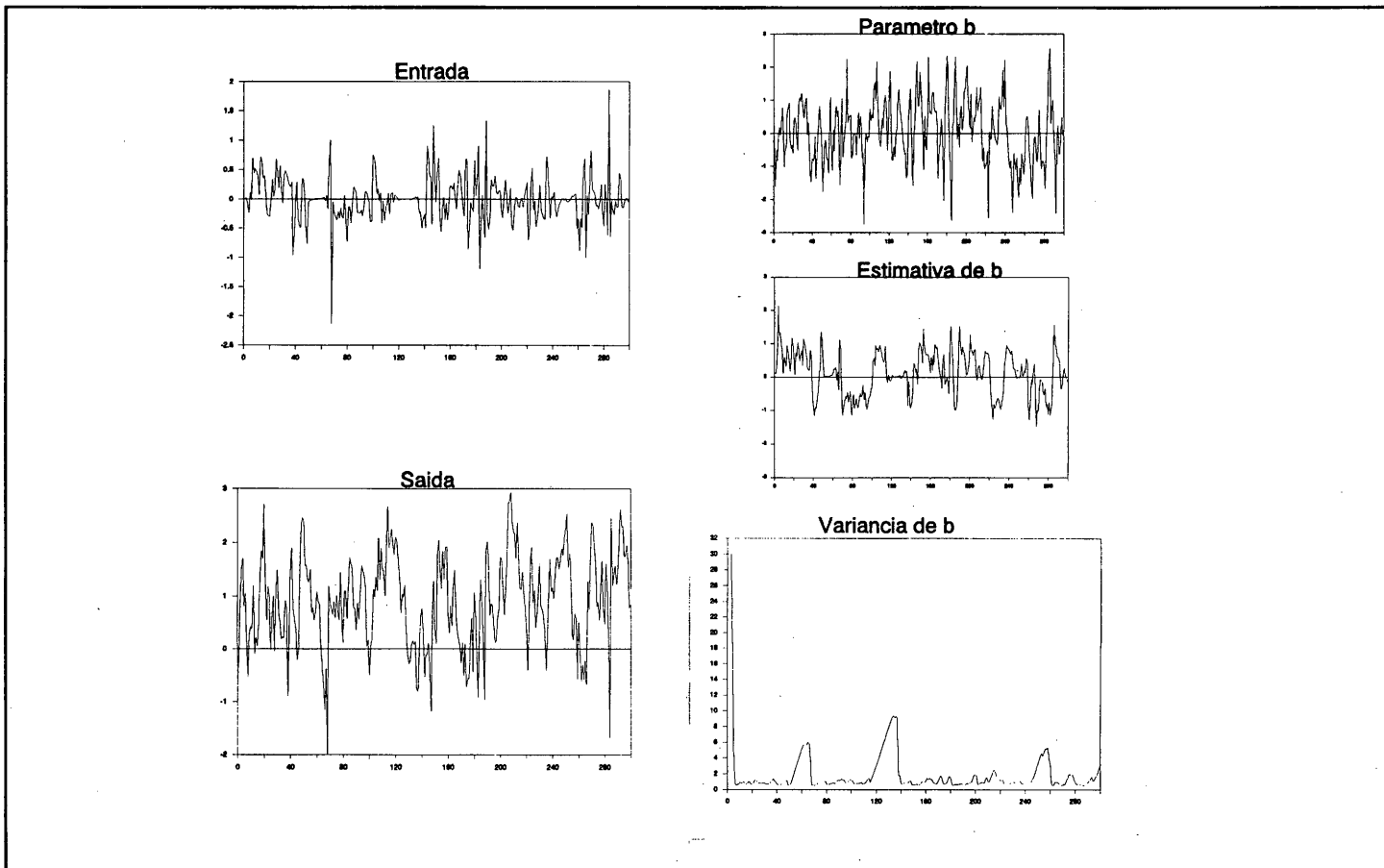


Figura 2 - Simulação do sistema (5.1) com o controlador de dois estágios utilizando previsão e a mesma sequência da figura 1. O desligamento prolongado do sinal de controle não ocorre, melhorando a estimação.