

CONTROLE \mathcal{H}_∞ DE SISTEMAS DINÂMICOS COM RESTRIÇÕES ESTRUTURAIS*

Pedro Luis Dias Peres Sergio Ricardo de Souza[†] José Claudio Geromel
LAC-DT / Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP,
CP 6101, 13081, Campinas, SP, Brasil,
e-mail: peres@dt.fee.unicamp.br

RESUMO - Este artigo descreve um método de controle \mathcal{H}_∞ para a síntese de controladores estáticos de realimentação de estado, aplicado a sistemas lineares contínuos. Usando um espaço paramétrico apropriado, define-se um conjunto convexo ao qual se associa de maneira biunívoca o conjunto dos ganhos estabilizantes com nível prescrito da norma \mathcal{H}_∞ . A versatilidade da formulação leva a solucionar também o problema ótimo \mathcal{H}_∞ . Além disso, sua convexidade permite incorporar facilmente exigências adicionais, seja sobre o controlador, seja sobre o próprio modelo. Deste modo, restrições como incertezas paramétricas pertencentes a domínios convexos, falhas de atuadores ou imposição de estrutura como ganho descentralizado podem ser facilmente tratadas. Os métodos clássicos existentes na literatura, baseados na solução de equações do tipo Riccati, não se adequam ao tratamento de situações como as acima. Exemplos são apresentados de modo a ilustrar os resultados teóricos.

Palavras-Chave: Controle \mathcal{H}_∞ , Controle Robusto Descentralizado, Falha de Atuadores, Programação Convexa, Estabilizabilidade Quadrática

\mathcal{H}_∞ CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS WITH STRUCTURAL CONSTRAINTS

ABSTRACT - This paper describes a method for \mathcal{H}_∞ control synthesis by state feedback applied to continuous-time linear systems. Using an appropriate parameter space, a convex set can be defined to which, in an one-to-one

relationship, all stabilizing state feedback gains with a prescribed \mathcal{H}_∞ -norm disturbance attenuation are associated. The versatility of the adopted formulation allows to solve the optimal \mathcal{H}_∞ control also. Furthermore, thanks to convexity, additional constraints can be easily incorporated, as parameter uncertainty belonging to convex polyhedral domains, actuator failures or decentralized control. The existing methods in the literature, usually based on Riccati like inequalities, are not adequate in these situations. Examples illustrate the theoretical results.

Keywords: \mathcal{H}_∞ Control, Robust Decentralized Control, Actuators Failure, Convex Programming, Quadratic Stabilizability

1 - INTRODUÇÃO

Um dos principais temas tratados nos últimos anos em Teoria de Controle tem sido o chamado problema de otimização \mathcal{H}_∞ (para uma lista bibliográfica abrangente, veja Dorato, 1987; Dorato et. al., 1993 e Kwakernaak, 1993). Sua proposição inicial data de 1981, por G. Zames, como parte do processo de revisão crítica dos caminhos tomados pela Teoria de Controle nos anos 60 e 70 (Zames, 1981). Durante este período, o Problema Linear Quadrático (PLQ) foi sem dúvida a principal ferramenta no projeto de controladores para sistemas MIMO. Apesar de suas intrínsecas características de robustez, como margem de fase de 60° e margem de ganho infinita, o PLQ não permite ou perde tais características ao considerarmos variações de parâmetros do sistema ou restrições como estrutura descentralizada do ganho e falhas de atuadores. Em todos estes casos, o ganho obtido a partir da solução da equação algébrica de Riccati para o sistema nominal não garante a estabilização do sistema em análise.

*Este trabalho teve financiamento da FAPESP, CNPq e CAPES.

[†]Licenciado do Dep. Eletrônica e Sistemas, EE, UFG, Goiânia.

⁰Artigo submetido em 21/10/93;

1ª Revisão em 18/02/94; 2ª Revisão em 03-03-94

Aceito por recomendação do Ed. Consultor Prof. Dr. Liu Hsu

dimensões apropriadas e são supostas conhecidas; assumimos que $C'D = 0$ (hipótese de ortogonalidade) e $D'D > 0$. A primeira hipótese implica que não há termos cruzados entre as ponderações das variáveis de controle e de estado na saída $z(t)$. A segunda significa que a matriz de ponderação de controle deve ser não-singular. As matrizes A e B_2 serão inicialmente supostas conhecidas, com dimensões adequadas. Definindo

$$A_f \triangleq A - B_2 K, \quad C_f \triangleq C - DK \quad (1)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho a ser determinado, pertencente ao conjunto \mathcal{K} dos ganhos admissíveis dado por

$$\mathcal{K} \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : (A - B_2 K) \text{ assint. estável}\} \quad (2)$$

temos então que a função de transferência em malha fechada da perturbação $w(t)$ para a saída $z(t)$ é definida como

$$H(s) = C_f [sI - A_f]^{-1} B_1 \quad (3)$$

Note que $H(\cdot)$ obviamente depende do ganho K . Associada a esta função, para $s = j\omega$ e $\omega \in \mathbb{R}_+$ define-se a norma \mathcal{H}_∞ , como (Doyle et. al., 1989)

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max} [H(j\omega)] \quad (4)$$

Ao estudarmos o problema \mathcal{H}_∞ , uma questão importante é o entendimento do significado desta norma. Considere que (3) representa um sistema monovariável. Então, (4) irá identificar, em todo o espectro de frequências $\omega \in \mathbb{R}_+$, aquela que fornece o maior módulo da função de transferência. Minimizar a norma \mathcal{H}_∞ de $H(s)$ significa também minimizar a influência do pior sinal de perturbação aplicado ao sistema. A única consideração com relação ao espectro de potência do sinal $w(t)$ é que seja limitado. No caso do PLQ, otimizar a norma quadrática significa minimizar a influência de uma média dos sinais aplicados, pressupondo portanto um espectro de potência conhecido. A figura 1 apresenta o significado da norma \mathcal{H}_∞ no caso de diagramas de Nyquist e de Bode para sistemas monovariáveis. Para sistemas multivariáveis, é mais usual apresentar a norma \mathcal{H}_∞ através do chamado Diagrama de Valores Singulares.

Dois problemas serão objeto de análise neste artigo:

Problema (P1) (Problema Sub-ótimo \mathcal{H}_∞): *Dado $\gamma > 0$, determinar o conjunto de todos os ganhos $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$, ou seja, tal que o sistema (Σ) seja assintoticamente estável com atenuação de distúrbios γ .*

Problema (P2) (Problema Ótimo \mathcal{H}_∞): *Determinar $K \in \mathcal{K}$ tal que*

$$K = \arg \min \{ \gamma : \|H(s)\|_\infty \leq \gamma, K \in \mathcal{K} \} \quad (5)$$

Resolver o problema (P1) equivale, de fato, a caracterizar um subconjunto $\mathcal{K}_\gamma \subseteq \mathcal{K}$, dado por

$$\mathcal{K}_\gamma = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : K \in \mathcal{K}, \|H(s)\|_\infty \leq \gamma\} \quad (6)$$

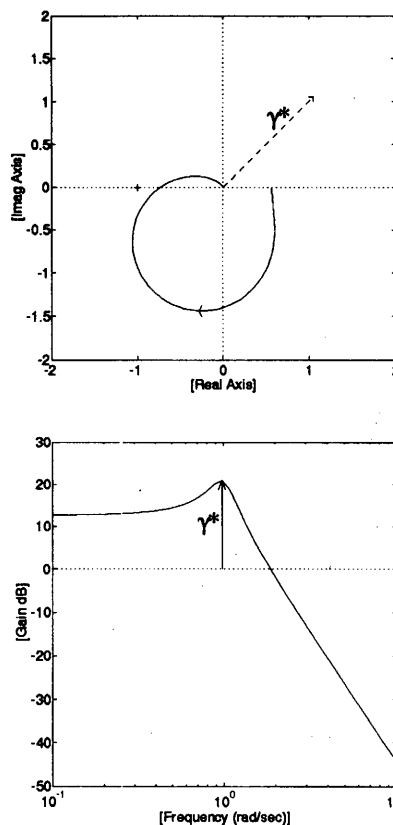


Figura 1 - Norma \mathcal{H}_∞ para sistemas SISO.

e o problema (P1) é classicamente denominado como problema de estabilização com nível prescrito de atenuação de distúrbios, notação primeiramente utilizada em Petersen (1987b).

Já a solução do problema (P2) pode ser aproximada iterativamente através de uma série de subproblemas na forma de (P1), baixando-se gradativamente o valor de atenuação γ . O problema (P2) pode ser reescrito como

$$\min \{ \gamma : K \in \mathcal{K}_\gamma \} \quad (7)$$

e alguns métodos numéricos de iteração em γ são discutidos em Doyle et. al. (1989) e Scherer (1990). Tais procedimentos, além de não tratarem globalmente as variáveis de otimização envolvidas, não permitem a incorporação de restrições adicionais ao problema. Finalmente, o conjunto \mathcal{K}_γ possui uma geometria complicada, possivelmente não-convexa, uma vez que o ganho K atua de forma não-linear em $H(s)$.

Este artigo se concentra principalmente em mostrar que tanto (P1) quanto (P2) podem ser convertidos em problemas convexos, permitindo portanto que quaisquer restrições que não alterem tal característica possam ser convenientemente incorporadas e, além disso, que procedimentos de programação matemática de comprovada eficácia como o método de planos de corte venham a ser utilizados para resolvê-los.

3 - ABORDAGEM CONVEXA

Esta seção se dedica a apresentar como os problemas (P1) e (P2) podem ser convertidos em problemas convexos. A primeira subseção está voltada ao problema sub-ótimo, a segunda ao problema ótimo e a última mostra como obter a solução desejada através de procedimentos tipo "linearização externa".

3.1 - Problema sub-ótimo

O Lema abaixo, derivado em Scherer (1989), relaciona uma inequação tipo Riccati a um limitante da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de malha fechada $H(s)$.

Lema 1 *Seja $\gamma > 0$ uma constante dada e considere o par (A_f, C_f) observável. Então, A_f é assintoticamente estável e $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a inequação algébrica tipo Riccati*

$$A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C_f'C_f \leq 0 \quad (8)$$

possuir uma solução P simétrica e definida positiva.

Prova: Veja Scherer (1989). \square

Note que este Lema estabelece condições necessárias e suficientes para que um sistema em malha fechada possa satisfazer a condição de estabilização com nível prescrito γ de atenuação de distúrbios. Por outro lado, não aponta uma forma explícita de calcular um ganho K admissível. Uma forma "em malha aberta" é apresentada no Lema 2 a seguir (Doyle et. al., 1989; Scherer, 1989).

Lema 2 *Seja $\gamma > 0$ uma constante dada e considere o par (A, C) observável e o par (A, B_2) controlável. Então, $\mathcal{K}_\gamma \neq \emptyset$ se e somente se existir $W = W' > 0$ solução da inequação*

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2 \leq 0 \quad (9)$$

No caso afirmativo, $K = (D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$.

Prova: Veja Scherer (1989). \square

Com o Lema 2, podemos encontrar um ganho de realimentação de estados $K \in \mathcal{K}_\gamma$, resolvendo o problema (P1) (e iterativamente (P2)) para sistemas precisamente conhecidos. Infelizmente, o ganho robusto K associado depende de maneira direta dos parâmetros do modelo, tornando esse procedimento ineficaz quando considerações do tipo incertezas paramétricas ou falhas de atuadores são incorporadas.

Definimos agora as seguintes matrizes, associadas ao sistema (Σ) , numa formulação aumentada:

$$F = \begin{bmatrix} A & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R = \begin{bmatrix} C'C & 0 \\ 0 & D'D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} B_1B_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos também a função $\Theta(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta(W, \mu) = FW + WF' + WRW + \mu Q \quad (11)$$

e o conjunto

$$\mathcal{C}_\infty = \left\{ (W, \mu), \quad W = W' \geq 0, \mu \geq 0 : \right.$$

$$\left. v'\Theta(W, \mu)v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (12)$$

onde \mathcal{N} é o espaço nulo de G' , e W é particionada na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (13)$$

com $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, $W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Observe que $v \in \mathcal{N} \iff v' = [x' \ 0]$. Além disso, note que a matriz F acima concentra toda a dinâmica em malha aberta do modelo, enquanto G é uma matriz constante, dependente unicamente das dimensões deste.

Antes de apresentar o Teorema que resolve o problema (P1) via análise convexa, definimos o conjunto

$$\mathcal{C}_\infty(\gamma) = \left\{ W = W' \geq 0, v'\Theta(W, \gamma^{-2})v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\}$$

onde $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ é um conjunto de matrizes W e, para $\mu = \gamma^{-2}$, $(W, \mu) \in \mathcal{C}_\infty$ se e somente se $W \in \mathcal{C}_\infty(\gamma)$.

Teorema 1 *Seja $\gamma > 0$ dado e suponha o par (A, C) observável. Então, as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

(a) $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ é convexo.

(b) $\mathcal{C}_\infty(\gamma) \neq \emptyset$ se e somente se (Σ) for estabilizável com atenuação de distúrbios γ ; no caso afirmativo, o ganho é dado por $K = W_2'W_1^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$.

Prova: O item (a) segue diretamente da observação que, para W^1 e $W^2 \in \mathcal{C}_\infty(\gamma)$, a matriz $W = \alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2$ também pertence a $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$, com $\alpha \in [0, 1]$. O item (b) requer maior trabalho. Como γ é dado, utilizando as matrizes aumentadas definidas em (10), temos que, para todo $v \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} v'\Theta(W, \gamma^{-2})v &= \\ &= x' \left[AW_1 - B_2W_2' + W_1A' - W_2B_2' + W_1C'CW_1 + \right. \\ &\quad \left. + W_2D'DW_2' + \gamma^{-2}B_1B_1' \right] x \leq 0 \end{aligned}$$

Com a condição de ortogonalidade, obtemos

$$\begin{aligned} x' \left[(A - B_2W_2'W_1^{-1})W_1 + W_1(A - B_2W_2'W_1^{-1})' + \right. \\ \left. + W_1(C - DW_2'W_1^{-1})'(C - DW_2'W_1^{-1})W_1 + \right. \\ \left. + \gamma^{-2}B_1B_1' \right] x \leq 0 \end{aligned}$$

ou seja, para $K = W_2'W_1^{-1}$ e A_f como em (1), multiplicando à esquerda e à direita por W_1^{-1} a expressão matricial

entre os colchetes, pelo Lema 1 concluímos que $K \in \mathcal{K}_\gamma$. A suficiência está demonstrada.

A necessidade vem do fato que, pelo Lema 1, para γ dado, existe uma matriz $W = P^{-1}$ e um ganho K tais que, com (1), a condição (8) é satisfeita. Lembrando que $C'D = 0$, obtemos

$$AW - B_2KW + WA' - WK'B'_2 + WC'CW + WK'D'DKW + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq 0$$

Como $\forall v \in \mathcal{N}$ é da forma $v' = [x' \ 0]$ e para F como em (10), a expressão anterior implica que a matriz \mathcal{W} dada por

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W & WK' \\ KW & KWK' \end{bmatrix} \geq 0$$

pertence a $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$. A prova do Teorema está completa. \square

Este Teorema estabelece uma correspondência entre elementos do conjunto \mathcal{K}_γ (de geometria complicada) e o conjunto convexo $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$. A todo elemento $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_\infty(\gamma)$ corresponde um ganho $K = W'_2W_1^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$ (e vice-versa) que garante atenuação \mathcal{H}_∞ menor que o limitante $\gamma > 0$ fornecido *a priori*. Note que $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ e \mathcal{K}_γ são parametrizados com relação ao nível desejado de atenuação de distúrbios.

O Problema (P1) pode ser resolvido utilizando-se o Teorema 1. De fato, qualquer elemento \mathcal{W} pertencente ao conjunto convexo $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$ fornece um ganho de realimentação de estado $K = W'_2W_1^{-1}$ que garante estabilidade assintótica e atenuação γ . Podemos então definir um problema de otimização do tipo

$$\min \left\{ \mathcal{J}(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathcal{C}_\infty(\gamma) \right\} \quad (14)$$

onde $\mathcal{J}(\cdot)$ define um critério para a escolha de \mathcal{W} ; obviamente, este problema será convexo sempre que $\mathcal{J}(\cdot)$ for convexo em \mathcal{W} . Além do mais, com a escolha de um critério adequado, o problema (14) pode ser utilizado para resolução de problemas de controle com critérios mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (Geromel et. al., 1992).

3.2 - Problema Ótimo \mathcal{H}_∞

Considere então o problema (P2) como formulado em (5). O objetivo nesta subseção é solucioná-lo como um problema de programação convexa onde o ganho K^* e o escalar γ^* , solução de (P2), sejam determinados de forma conjunta. Para isso, seja o problema (P3) definido como

$$(P3) \quad \max \{ \mu : (\mathcal{W}, \mu) \in \mathcal{C}_\infty \} \quad (15)$$

O Teorema a seguir apresenta sua solução e o relaciona à solução de (P2).

Teorema 2 *O problema (P3) possui as seguintes propriedades:*

(a) (P3) é um problema convexo.

(b) *Seja (\mathcal{W}^*, μ^*) a solução ótima de (P3). Então $K^* = W'_2W_1^{-1}$ e $\gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ solucionam (P2).*

Prova: A parte (a) segue da observação que, pela definição do conjunto \mathcal{C}_∞ e da função $\Theta(\mathcal{W}, \mu)$, esta última é convexa em (\mathcal{W}, μ) e portanto \mathcal{C}_∞ também o é. Logo, (P3) é um problema convexo com função objetivo linear. Quanto ao item (b), pelo Teorema 1, com $\gamma^* = \sqrt{\mu^*}$, $\mathcal{W}^* \in \mathcal{C}_\infty(\gamma^*)$ e $K^* = W'_2W_1^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$. Como μ^* é, por construção, o valor máximo de μ tal que $\mathcal{C}_\infty \neq \emptyset$, então o par (\mathcal{W}^*, μ^*) fornece (K^*, γ^*) como solução ótima de (P2). \square

Com o Teorema 2, o problema ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser abordado via análise convexa, envolvendo de maneira global no processo de otimização o limitante da norma e o ganho estabilizante, relacionados com o par (\mathcal{W}, μ) . Para finalizar a discussão, note que a variável μ não possui um limitante superior, e isto pode causar um mau comportamento do procedimento numérico a ser adotado. Assim, torna-se importante determinar *a priori* um limitante superior μ_M para o valor μ^* solução de (P3), o que é apresentado a seguir (para maiores detalhes, veja Peres et. al., 1994).

Teorema 3 *Seja $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ arbitrária e $\mu_M > 0$ tal que*

$$\mu_M > \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \mu : v' (FR_\epsilon^{-1}F' - \mu Q) v \geq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (16)$$

Então $(\mathcal{W}, \mu_M) \notin \mathcal{C}_\infty$.

Prova: Defina $R_\epsilon = R + \epsilon I$ para $\epsilon > 0$ e considere a seguinte fatoração:

$$FW + WF + WR_\epsilon\mathcal{W} + \mu Q = (FR_\epsilon^{-1} + \mathcal{W}) R_\epsilon (FR_\epsilon^{-1} + \mathcal{W})' - FR_\epsilon^{-1}F' + \mu Q$$

Para $\epsilon \rightarrow 0^+$, o lado esquerdo desta expressão tende para $\Theta(\mathcal{W}, \mu)$ e assim podemos escrever que

$$v'\Theta(\mathcal{W}, \mu)v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v' \left[(FR_\epsilon^{-1} + \mathcal{W}) R_\epsilon (FR_\epsilon^{-1} + \mathcal{W})' - FR_\epsilon^{-1}F' + \mu Q \right] v \geq - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v (FR_\epsilon^{-1}F' - \mu Q) v$$

Portanto, para $\mu = \mu_M$ como definido em (16), existe $v \in \mathcal{N}$ tal que $v'\Theta(\mathcal{W}, \mu_M)v > 0$. Neste caso, $(\mathcal{W}, \mu_M) \notin \mathcal{C}_\infty$ e o Teorema está provado. \square

O resultado acima apresenta dificuldades por exigir que o limite em (16) seja finito. Como demonstrado em Peres et. al. (1994), uma condição suficiente para tal é que o sinal de perturbações $w(t)$ seja "rico", ou seja, que $\dim(w) > n - \text{posto}(C)$ e que a matriz

$$V \triangleq (B_1B'_1)B'_1 [A \quad -B_2] \in \mathbb{R}^{l \times p}$$

seja de posto completo, lembrando que $l = \dim(w)$. Neste caso, μ_M pode ser obtido diretamente a partir de

$$\mu_M = \min \{ \mu > 0 : \det(V'V - \mu R) = 0 \}$$

e, deste modo, todo $\mu > \mu_M$ é tal que $(W, \mu) \notin C_\infty$. O Corolário abaixo sintetiza essa discussão.

Corolário 1 *Seja o problema convexo*

$$(P4) \quad \max \{ \mu : (W, \mu) \in C_\infty, \mu \in [0, \mu_M] \} \quad (17)$$

Então a solução de (P4) é equivalente à de (P3).

Prova: Imediata, uma vez que, pelo Teorema anterior, $C_\infty = \emptyset$ para $\mu > \mu_M$. \square

Algumas observações são pertinentes em relação a estes resultados. Primeiramente, a determinação do limitante μ_M proposta no Teorema 3 não implica em cálculos de norma \mathcal{H}_∞ ou soluções de equações de Riccati. Uma comparação entre este limitante e outro proposto em Scherer (1989) é feita em Peres et. al. (1994). Em segundo lugar, como apontado em Scherer (1989), o problema ótimo \mathcal{H}_∞ pode levar à ocorrência de ganhos de norma ilimitada ou muito alta. Em Peres et. al. (1994), um procedimento para evitar tal fenômeno é proposto, baseado na verificação da tendência da sub-matriz W_1 à singularidade.

3.3 - Solução numérica e algoritmo

A solução de (14) pode ser obtida, por exemplo, através de um procedimento iterativo do tipo "linearização externa" (Bernussou et. al., 1989). Este algoritmo, explorando a convexidade do problema proposto, aproxima o conjunto C_∞ por uma seqüência de politopos: partindo-se de um politopo $\mathcal{P}^\ell \supseteq C_\infty$, obtém-se a solução ótima $(W^\ell, \mu^\ell) \in \mathcal{P}^\ell$ por um problema de programação linear. Se o par não pertence ao conjunto C_∞ , é gerado um hiperplano separador entre este e a solução corrente e a nova restrição é agregada ao problema, definindo-se o politopo $\mathcal{P}^{\ell+1}$. Vale lembrar que no problema (P1) o limitante $\gamma \geq 0$ é dado, trabalhando-se então com o conjunto $C_\infty(\gamma)$.

Detalhando um pouco mais o procedimento, consideremos o problema

$$\max \{ \mu : (W, \mu) \in C_\infty, \mu \in [0, \mu_M] \} \quad (18)$$

e, por simplicidade, supomos que um dado par $(W_0, \mu_0) \notin C_\infty$ é tal que $\mu_0 \in [0, \mu_M]$ e $W_0 = W'_0 \geq 0$. Nesse caso, apenas a restrição $v'\Theta(W_0, \mu_0)v \leq 0$ foi violada. O hiperplano a ser determinado deve separar C_∞ do par (W_0, μ_0) , ou seja, definindo

$$f(W, \mu) \triangleq \lambda_{max} [T'\Theta(W, \mu)T] \quad (19)$$

com $T' = [I \quad 0]$ uma matriz-base geradora do espaço nulo de G' . Pela equação (19), sabemos que existe um vetor normalizado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que, com $v'_0 = [x'_0 \quad 0]$,

$$f(W_0, \mu_0) = v'_0 \Theta(W_0, \mu_0) v_0 \quad (20)$$

e

$$f(W, \mu) \geq v'_0 \Theta(W, \mu) v_0, \quad \forall (W, \mu) \quad (21)$$

Lembrando que $\Theta(W, \mu)$ é uma função convexa e que $\text{Tr}(X'Y) = \langle X, Y \rangle$ para matrizes com dimensões apropriadas, após manipulações, chega-se à equação do semi-espaço contendo C_∞ :

$$\langle X_0, W \rangle + \alpha_0 \mu \leq \beta_0 \quad (22)$$

onde

$$\beta_0 = v'_0 W_0 R W_0 v_0 \quad (23)$$

$$\alpha_0 = v'_0 Q v_0 \quad (24)$$

$$X_0 = (F + W_0 R)' v_0 v'_0 + v_0 v'_0 (F + W_0 R) \quad (25)$$

Concluindo, é relativamente simples o cálculo do hiperplano separador, e caso fosse outra a restrição violada, o hiperplano seria calculado de maneira análoga.

Assim, em uma iteração genérica ℓ , o politopo de restrições $\mathcal{P}^{\ell+1}$ é obtido da interseção de \mathcal{P}^ℓ com o semi-espaço definido por (22). O procedimento converge (Geromel et. al., 1991), de forma que

$$\mathcal{P}^\ell \supset \mathcal{P}^{\ell+1} \supset \mathcal{P}^{\ell+2} \supset \dots \supset C_\infty$$

e a solução de uma dada iteração ℓ torna-se infactível para todo $k > \ell$. Escolhendo sempre a restrição mais violada, garantimos a maior profundidade de corte por iteração.

O algoritmo a seguir consolida o desenvolvimento apresentado. Note que os problemas na forma (14) são resolvidos por algoritmos similares.

Passo 1: Faça $\ell \leftarrow 0$ e defina um politopo inicial $\mathcal{P}^\ell \supseteq C_\infty$.

Passo 2: Determine (W^ℓ, μ^ℓ) solução ótima do problema de programação linear

$$\max \{ \mu : (W, \mu) \in \mathcal{P}^\ell, \mu \in [0, \mu_M] \}$$

Se for infactível, então $C_\infty = \emptyset$.

Passo 3: Se $(W^\ell, \mu^\ell) \in C_\infty$, então pare: a solução ótima de (18) foi encontrada. Caso contrário, determine o hiperplano que separa (W^ℓ, μ^ℓ) de C_∞ e obtenha o politopo $\mathcal{P}^{\ell+1}$ acrescentando a nova restrição. Faça $\ell \leftarrow \ell + 1$ e retorne ao passo 2.

É importante ressaltar que tanto (P1) quanto (P2) foram convertidos em problemas convexos e esta propriedade geométrica é explorada pela solução numérica proposta aqui, envolvendo no processo de otimização de maneira conjunta W e μ . A próxima seção demonstra a versatilidade e o potencial da abordagem apresentada, adaptável (graças à convexidade) a várias situações de projeto de controle.

4 - RESTRIÇÕES ADICIONAIS

Esta seção estende os resultados precedentes no sentido de incorporar o tratamento de restrições adicionais. Embora abordemos separadamente três casos particulares, é óbvio que, com a convexidade, quaisquer outras restrições que não alterem as características geométricas do problema podem ser consideradas, mesmo simultaneamente.

4.1 - Sistemas incertos

Consideremos sistemas lineares descritos por (Σ) onde o par (A, B_2) é incerto, ou seja, os elementos destas matrizes não são conhecidos precisamente, mas sabe-se que a matriz $F \sim (A, B_2)$ definida em (10) tem dimensão conhecida $p \times p$ e pertence ao conjunto poliedral convexo \mathcal{D}_F dado por

$$\mathcal{D}_F \triangleq \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} : F = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i; \xi_i \geq 0; \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (26)$$

sendo N o número de vértices deste poliedro. Em outras palavras, qualquer matriz $F \in \mathcal{D}_F$ pode ser escrita como uma combinação convexa de "matrizes-vértices" F_i . Defina então a função $\Theta_i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{p \times p} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\Theta_i(W, \mu) = F_i W + W F_i' + W R W + \mu Q \quad (27)$$

e o conjunto $\mathcal{C}_\infty \triangleq \bigcap_{i=1}^N \mathcal{C}_{\infty i}$, onde

$$\mathcal{C}_{\infty i} = \left\{ (W, \mu), W = W' \geq 0, \mu \geq 0, : v' \Theta_i(W, \mu) v \leq 0, \forall v \in \mathcal{N} \right\} \quad (28)$$

sendo \mathcal{N} o espaço nulo de G' e W particionada como em (13). O conjunto de ganhos de realimentação de estado admissíveis, denotado \mathcal{K}_G , é definido como

$$\mathcal{K}_G \triangleq \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : (A - B_2 K) \text{ quad. est.} \right\} \quad (29)$$

O conceito de estabilidade quadrática impõe que um mesmo ganho K e uma mesma função quadrática de Lyapunov $v(x) = x' P x$ assegurem a estabilidade para todo o domínio de incertezas, ou seja,

$$(A - B_2 K)' P + P (A - B_2 K) < 0 \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad (30)$$

Definimos então o problema (P5), que é a extensão do problema (P2) para sistemas incertos:

Problema (P5) (Problema de Custo Garantido \mathcal{H}_∞): Determinar $K \in \mathcal{K}_G$ e $\gamma_G \geq 0$ tal que

$$\gamma_G \triangleq \min \left\{ \gamma : K \in \mathcal{K}_G, \|H(s)\|_\infty \leq \gamma, \forall F \in \mathcal{D}_F \right\} \quad (31)$$

Note que γ_G representa o menor valor de γ tal que a estabilidade quadrática do sistema seja assegurada. A idéia por

detrás do conceito de custo garantido é exatamente esta, ou seja, é um limitante superior mínimo para o custo (no caso em norma \mathcal{H}_∞) do sistema em malha fechada. Com o conjunto \mathcal{C}_∞ definido como a interseção dos $\mathcal{C}_{\infty i}$ (28), considere o problema (P4):

Teorema 4 As afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) \mathcal{C}_∞ é convexo.

(b) $(W, \gamma^{-2}) \in \mathcal{C}_\infty$ se e somente se o sistema (Σ) for quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios γ .

(c) Seja (W^*, μ^*) a solução ótima de (P4). Então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ e $\gamma_G = 1/\sqrt{\mu^*}$ solucionam (P5).

Prova: Como, pelo Teorema 1, $\mathcal{C}_{\infty i}$ é convexo, a interseção $i = 1 \dots N$ também o é. Quanto ao item (b), realizando-se a combinação convexa (ou seja, multiplicando-se por $\xi_i \geq 0$, $\sum \xi_i = 1$ e fazendo a soma de 1 a N), a prova segue os mesmos passos da prova do item (b) do Teorema 1, com $F_i \sim (A, B_2)_i$. Para o item (c), primeiramente assumamos que $(W^*, \mu^*) \in \mathcal{C}_\infty \neq \emptyset$. Então $K^* = W_2' W_1^{-1}$ estabiliza quadraticamente (Σ) com atenuação de distúrbios $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} \geq \gamma_G$. Como (W^*, μ^*) é a solução ótima global de (P4), γ^* é o menor limitante da norma \mathcal{H}_∞ , solução do problema (P5), e portanto $\gamma^* = \gamma_G$. \square

Este Teorema representa um dos resultados mais importantes deste artigo. De fato, ele generaliza o resultado do Teorema 1 para sistemas incertos, resolvendo o problema de custo garantido \mathcal{H}_∞ . A principal conclusão é que apenas os N "modelos-vértices" precisam ser investigados, e a solução numérica do problema é obtida a partir de um algoritmo similar ao apresentado na seção anterior. Note que, de maneira análoga à do caso precisamente conhecido, poderíamos definir o conjunto $\mathcal{C}_\infty(\gamma)$, mapeando assim o conjunto de ganhos quadraticamente estabilizantes com atenuação prescrita γ . Uma discussão mais aprofundada sobre o controle de custo garantido \mathcal{H}_∞ pode ser encontrada em Peres et. al. (1993).

4.2 - Controle descentralizado

Considere sistemas lineares descritos por (Σ) onde a restrição se dá a nível da estrutura do controlador. Em outras palavras, queremos determinar um ganho de realimentação de estados, com uma estrutura tipo bloco diagonal

$$K \equiv K_D \triangleq \text{bloc diag} \{K^1 \dots K^2 \dots K^M\}$$

caracterizando assim um controle descentralizado. Definindo $W_D = W_D' \in \mathbb{R}^{p \times p}$ como

$$W_D = \begin{bmatrix} W_{1D} & W_{2D} \\ W_{2D}' & W_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

com $W_{1D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva. O índice "D" indica que as matrizes devem possuir estrutura bloco diagonal.

Teorema 5 As afirmações abaixo são verdadeiras:

- (a) Se existe $(W_D, \gamma^{-2}) \in C_\infty$, então o sistema (Σ) é estabilizável com atenuação de distúrbios γ e o ganho robusto descentralizado é dado por $K_D = W'_{2D} W^{-1}_{1D}$.
- (b) Seja (W_D^*, μ^*) a solução ótima de (P3) com a restrição adicional $W = W_D$. Então $K_D^* = W'_{2D} W^{-1}_{1D}$ é tal que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma^* = 1/\sqrt{\mu^*}$ para todo $K_D \in \mathcal{K}$.

Prova: Segue a mesma linha das demonstrações anteriores, notando-se que a estrutura particular imposta a W_D é uma condição suficiente para obtenção do ganho descentralizado K_D . \square

4.3 - Falha de atuadores

Consideremos agora sistemas lineares dados por (Σ) sujeitos a falha de atuadores. Uma falha no atuador j correspondente ao controle $u_j(t)$ equivale, no modelo, a zerar a j -ésima coluna da matriz de controle B_2 . Para calcular um ganho K solução dos problemas (P1) ou (P2) e que ao mesmo tempo seja robusto com relação a falha de atuadores, definimos o conjunto \mathcal{B} como

$$\mathcal{B} \triangleq \{ B_2^j : j = 1 \dots L \} \quad (33)$$

Cada elemento B_2^j é obtido a partir da matriz B_2 zerando-se a coluna correspondente ao atuador passível de falha; o problema então é garantir estabilidade com atenuação γ de distúrbios para todo $B_2 \in \mathcal{B}$. Definindo as matrizes

$$F_j = \begin{bmatrix} A & -B_2^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots L$$

notamos que problemas envolvendo falha de atuadores podem ser vistos como equivalentes aos descritos na subseção 4.1, para um sistema incerto com a matriz A conhecida e a matriz de controle pertencente ao conjunto \mathcal{B} , que pode inclusive contemplar outras situações como falha de mais de um atuador simultaneamente. O valor γ_G , obtido da solução do problema (P5), representa um custo garantido \mathcal{H}_∞ para robustez a falhas de atuadores.

5 - EXEMPLOS

O primeiro exemplo é retirado de Petersen (1987a), onde é proposto um método para a estabilização de um conjunto de pontos de operação de um sistema linear, através de uma mesma lei de controle não-linear. Trata-se do modelo de equações de estado para o modo longitudinal de curto período para o avião F4E, em quatro pontos de operação. Dois problemas de controle \mathcal{H}_∞ são abordados aqui: o problema de estabilização quadrática com atenuação γ prescrita (ou seja, a extensão do problema (P1) para tratar o caso de sistemas incertos) e também o problema (P5), de custo garantido \mathcal{H}_∞ . Cada ponto de operação, descrito por um par $(A, B_2)_i$, constitui um vértice do domínio de incertezas

PO	1	2	3	4
f_{11}	-0.9896	-0.6607	-1.702	-0.5162
f_{12}	17.41	18.11	50.72	29.96
f_{13}	96.15	84.34	263.5	178.9
f_{21}	0.2648	0.08201	0.2201	-0.6896
f_{22}	-0.8512	-0.6587	-1.418	-1.225
f_{23}	-11.39	-10.81	-31.99	-30.38
f_{14}	97.78	272.2	85.09	175.6

Tabela 1 - Pontos de Operação

\mathcal{D}_F . Os dados são:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo que os elementos incertos estão na tabela 1.

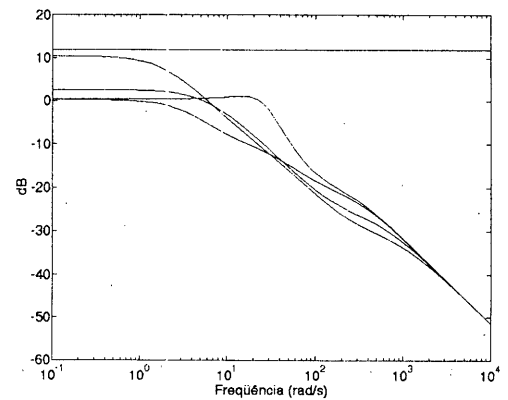


Figura 2 - Diagrama de Valores Singulares - Exemplo 1.

Impondo-se um limitante $\gamma = 14$ dB para a norma \mathcal{H}_∞ , obtém-se o ganho robusto

$$K = \begin{bmatrix} -1.2636 & -12.1822 & 5.4632 \end{bmatrix}$$

que garante $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$ para os quatro pontos de operação considerados. Solucionando-se agora (P5), encontra-se que o menor limitante em norma \mathcal{H}_∞ é dado por

$$\gamma^* = 11.8297 \text{ dB}$$

correspondente ao ganho

$$K^* = \begin{bmatrix} -3.4601 & -26.6724 & -1.3870 \end{bmatrix}$$

Note que o ganho K cresce em norma ao se aproximar da solução ótima. Além disso, no primeiro caso, o valor efetivo da norma \mathcal{H}_∞ é dado por $\|H(s)\|_\infty = 11.4403$ dB, enquanto no segundo obtém-se $\|H(s)\|_\infty = 10.4710$ dB. A figura 2 mostra o diagrama de valores singulares para os quatro pontos de operação, ilustrando o nível mínimo γ^* de atenuação garantido.

No segundo exemplo, com dados numéricos gerados de maneira aleatória, resolvemos o Problema (P1) com a restrição de controle descentralizado. As matrizes são dadas abaixo:

$$F = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.69 & 0.78 & 1.79 & -1.69 & 0.12 \\ 0.97 & 1.23 & 1.51 & 1.09 & 0.23 & 2.43 \\ -0.86 & -0.08 & -1.62 & 0.02 & -1.51 & 0.10 \\ 1.35 & 1.20 & 1.31 & -0.41 & -1.91 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = I_{4 \times 4}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Impondo o limitante $\gamma = 9.3$ dB, obtemos o ganho robusto descentralizado

$$K_D = \begin{bmatrix} 37.5100 & 86.1372 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5818 & -0.4129 \end{bmatrix}$$

e se calcularmos a norma \mathcal{H}_∞ do sistema realimentado pelo ganho K_D , obtemos $\|H(s)\|_\infty = 9.0264$ dB, verificando assim a atenuação prescrita.

Como terceiro exemplo, selecionamos um caso de robustez a falha de atuadores com atenuação \mathcal{H}_∞ prescrita. As matrizes que descrevem o sistema (obtidas aleatoriamente) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.22 & 0.37 \\ 1.30 & 1.34 & -0.86 \\ -0.59 & -1.75 & 1.61 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.09 & 1.54 \\ -0.01 & 0.52 \\ -0.12 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = I_{3 \times 3}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O conjunto \mathcal{B} é então composto por $\mathcal{B} = \{B_2, B_2^1, B_2^2\}$ onde B_2^1 e B_2^2 consideram falhas nos atuadores 1 ou 2, respectivamente. Dois casos são estudados. O primeiro considera um limitante $\gamma = 40$ dB. O ganho robusto K é então dado por

$$K_1 = \begin{bmatrix} 13.5290 & 51.1801 & -60.3197 \\ 2.6975 & 16.0165 & -20.6680 \end{bmatrix}$$

e o valor calculado da norma \mathcal{H}_∞ é $\|H(s)\|_\infty = 36.5021$ dB.

No segundo caso é imposto um limitante $\gamma = 34.8$ dB. O ganho robusto obtido é

$$K_2 = \begin{bmatrix} -5.8304 & 221.4941 & -338.7933 \\ -5.8471 & 89.3031 & -140.8659 \end{bmatrix}$$

sendo que a norma \mathcal{H}_∞ é dada por $\|H(s)\|_\infty = 34.5692$ dB. Note que o ganho robusto assume valores cada vez maiores em norma à medida que a exigência quanto ao limitante se torna mais restrita.

Para comparação, usando os resultados de Scherer (1989) e levando em conta apenas o sistema nominal, podemos calcular um ganho K_{nom} que garante o nível de atenuação (veja a equação (9) e o Lema 2) $\gamma = 12$ dB, obtendo

$$K_{nom} = \begin{bmatrix} 0.4593 & 1.1332 & -1.7687 \\ 3.3409 & 7.5785 & -8.1946 \end{bmatrix}$$

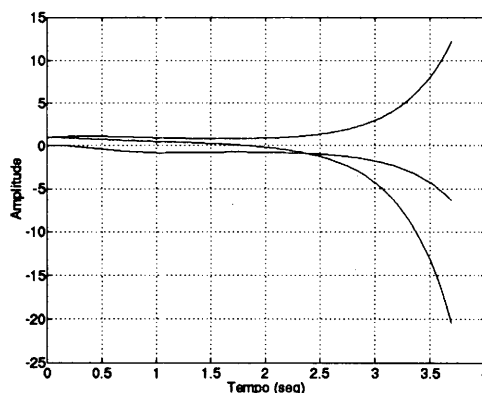


Figura 3 - Resposta temporal para K_{nom} - Exemplo 3.

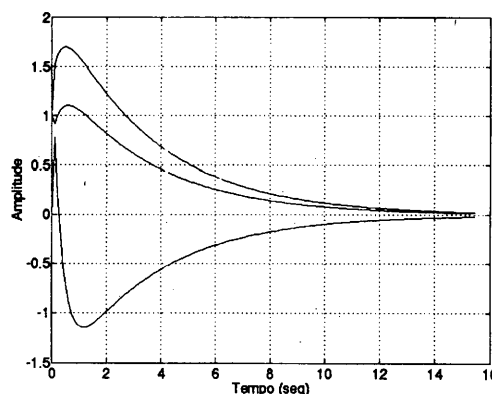


Figura 4 - Resposta temporal para K_2 - Exemplo 3.

e norma \mathcal{H}_∞ igual a 10.2613 dB. Realizamos então uma simulação apenas para o primeiro caso, para $\gamma = 40$ dB, onde no instante $t = 1.05$ s ocorre uma falha no atuador 2. As figuras 3 e 4 mostram o comportamento no tempo (condição inicial $x'_0 = [1 \ 1 \ 0]$) para os dois ganhos, K_{nom} e K_2 . Pelo figura 3, vemos que uma falha de atuador não levada em conta no projeto de um controlador pode ser desastrosa.

6 - CONCLUSÃO

Neste artigo é descrito um método para o cálculo de controladores estáticos de realimentação de estado e satisfazendo um critério em norma \mathcal{H}_∞ . Dois problemas são abordados: o problema de atenuação prescrita de distúrbios (também conhecido como problema sub-ótimo \mathcal{H}_∞) e o problema de minimização da norma \mathcal{H}_∞ . A principal contribuição advém de uma transformação no espaço paramétrico, que permite o trabalho com conjuntos convexos. Assim, além de resolver os problemas clássicos de controle \mathcal{H}_∞ citados acima, o método permite considerar restrições adicionais das mais diversas, como descentralização, sistemas incertos e/ou falhas de atuadores. Graças também à convexidade, algoritmos de programação matemática fornecem a solução com convergência assegurada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bernussou, J., J.C. Geromel, e P.L.D Peres (1989) "A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72.
- Dorato, P., (1987). *Robust Control*, IEEE Press.
- Dorato, P., R. Tempo e G. Muscato, (1993). "Bibliography on Robust Control", *Automatica*, Vol. 29, n° 2, pp. 201-213.
- Doyle, J. C., K. Glover, P.P. Khargonekar e B. Francis, (1989). "State-Space Solutions to the Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 831-847.
- Francis, B., (1987). *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Vol. 88, New York, Springer-Verlag.
- Francis, B. A. e J.C. Doyle, (1987). "Linear Control Theory with an \mathcal{H}_∞ Optimality Criterion", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, n° 4, pp. 815-844.
- Geromel, J. C., P.L.D. Peres, e J. Bernussou, (1991). "On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, n° 2, pp. 381-402.
- Geromel, J. C., P. L. D. Peres e S. R. Souza, (1992). "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control for Continuous-time Linear Systems", *Proc. of 31st Conference on Decision and Control*, Vol. 4, Tucson, Arizona, USA, pp. 3717-3722.
- Khargonekar, P. P., I.R. Petersen, e K. Zhou, (1990). "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, n° 3, pp. 356-361.
- Khargonegar, P. P. e M. Rotea, (1991). "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control: A Convex Optimization Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, n° 7, pp. 824-837.
- Kwakernaak, H. (1993). "Robust Control and \mathcal{H}_∞ -Optimization - Tutorial Paper", *Automatica*, Vol. 29, n° 2, pp. 255-273.
- Peres, P. L. D., J. C. Geromel, e S. R. Souza, (1993). " \mathcal{H}_∞ Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-Time Linear Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 20, pp. 413-418.
- Peres, P. L. D., J. C. Geromel, e S. R. Souza, (1994). "Optimal \mathcal{H}_∞ State Feedback Control for Continuous-Time Linear Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, aceito para publicação.
- Petersen, I. R., (1987). "A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control", *Automatica*, Vol. 23, n° 1, pp. 33-40.
- Petersen, I. R., (1987). "Disturbance Attenuation and \mathcal{H}_∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, n° 5, pp. 427-428.
- Scherer, C., (1989). " \mathcal{H}_∞ -Control by State-Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High-gain Occurrence", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pp. 383-391.
- Scherer, C., (1990). " " \mathcal{H}_∞ -Control by State-Feedback and Fast Algorithms for the Computation of Optimal \mathcal{H}_∞ -Norms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, n° 10, pp. 1090-1099.
- Veillette, R. J., J. V. Medanic, e W. R. Perkins, (1989). "Robust Stabilization and Disturbance Rejection for Systems with Structured Uncertainty", *Proc. of 28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, 1989, pp. pp. 936-941.
- Xie, L. e C. E. de Souza, (1991). "Robust \mathcal{H}_∞ Control for Linear System with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, n° 8, pp. 1188-1191.
- Zames, G., (1981). "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximative Inverses", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, n° 4, pp. 301-320.
- Zhou, K. e P. P. Khargonekar, (1988). "An Algebraic Riccati Equation Approach to \mathcal{H}_∞ Optimization", *Systems & Control Letters*, Vol. 11, pp. 85-91.