REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DISCRETOS MULTIVARIÁVEIS VIA DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Celso Pascoli Bottura Celso José Munaro
DMCSI-FEE-UNICAMP - CP 6101
13081-970 - Campinas - SP
e-mail: munaro@fee.unicamp.br

RESUMO: Neste trabalho propõe-se uma nova técnica para a obtenção de modelos dinâmicos de ordem reduzida a partir de modelos de alta ordem. A técnica usa a decomposição de Schur, um procedimento numérico estável e eficiente. São desenvolvidos dois métodos para obtenção dos modelos de ordem reduzida, baseados em técnicas de agregação modal bem conhecidas.

ABSTRACT: A new technique for obtaining reduced order dynamic models from high order models is proposed. The technique uses Schur decomposition, which is an efficient and stable numerical procedure. Based on modal aggregation approach, two methods for obtaining reduced order models are developed.

1 - INTRODUÇÃO

A aproximação de complexos modelos de sistemas físicos tem sido objeto de muitas pesquisas. Diferentes métodos de redução de ordem de modelos já foram propostos com esta finalidade. Os métodos comumente empregados para a redução de ordem envolvem abordagens diferentes para derivar os modelos reduzidos: via Agregação Modal (Davison, 1966: Aoki,1968; Wilson, Fisher e Seborg, 1972; Arbel e T-se, 1979: Marshall, 1966), procura-se eliminar modos pouco dominantes no sistema; métodos como Transformação Balanceada (Moore, 1981; Pernebo e Silverman, 1982) e A-gregação em Cadeia (Tse, Medanic e Perkins, 1977;Drenick, 1983 ;Jamshidi, 1983) envolvem a determinação de subsistemas pouco controláveis/ observáveis para serem eliminados do sistema original. Não existe porém, nenhum procedimento sistemático e que possa ser aplicado para todos os casos, cabendo ao usuário escolher o método que melhor lhe convier (veja por exemplo Lastman e Sinha (1985), para uma comparação entre as técnicas de Agregação Modal e Transformação Balanceada).

Neste trabalho, é empregada a abordagem da Agregação Modal, desprezando-se o efeito dos modos mais rápidos do sistema. Classicamente, o sistema é colocado na forma de Jordan com os autovalores ordenados de acordo com seu valor absoluto. A partir desta forma , derivam-se os modelos de ordem reduzida.

De um ponto de vista teórico, este método pode sempre ser empregado, computando-se a auto-estrutura do sistema. Entretanto, de um ponto de vista prático esta técnica apresenta problemas , devido basicamente a dois motivos. Primeiro, computar a forma de Jordan apresenta dificuldades práticas quando a matriz do sistema for defectiva ou próxima a uma matriz defectiva (Golub e Wilkinson, 1976), pois são necessárias decisões relativas a posto de matrizes. Segundo,a computação da forma de Jordan pode representar um esforço excessivo, especialmente quando o sistema for de grande ordem.

A contribuição deste trabalho está na proposição de dois métodos para a obtenção de modelos de ordem reduzida (Munaro, 1990; Bottura e Munaro, 1991). Estes métodos permitem obter os mesmos modelos derivados em Wilson, Fisher e Seborg (1972) substituindo a forma de Jordan pela forma de Schur (Golub e Van Loan, 1989; Stewart,1973). Este tipo de estratégia vem sendo muito utilizado para melhorar a eficiência e a estabilidade numérica em métodos de redução de ordem (Safonov e Chiang, 1989; Rabah e Khalil, 1989).

Na seção 2 são fornecidas algumas informações sobre a

[0] Artigo submetido em 22-02-91;
1^a Revisão em 20-12-92 2^a Revisão em 01-03-94
Aceito por recomendação do Ed. Consultor Prof. Dr. Liu Hsu

computação da forma de Schur. A computação é numericamente estável e eficiente, usando subrotinas padrão do EISPACK (Stewart, 1976; Flam e Walker, 1982; Smith *et al.*, 1976). De fato, a decomposição de Schur é uma rotina padrão para computar autovalores no EISPACK. Portanto, no EISPACK, obter a forma de Schur equivale ao cálculo dos autovalores.

Na seção 3 são desenvolvidos dois métodos para obtenção dos modelos reduzidos, baseados em suposições diferentes. No primeiro método, o modelo reduzido é derivado diretamente da forma de Schur. No segundo, além da forma de Schur um conjunto de equações algébricas é resolvido para então obter-se o modelo reduzido.

Na seção 4 os métodos de redução são aplicados a um modelo dinâmico discreto e, finalmente na seção 5, são apresentados comentários e conclusões sobre os métodos propostos.

2 - DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Para qualquer matriz real $A \in R^{nxn}$, existe uma matriz ortonormal Q tal que

$$S = Q^T A Q = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1n} \\ 0 & \overline{A}_{22} & \cdots & \overline{A}_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{A}_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde $\overline{A}_{ij}$ são blocos 1x1 correspondendo a autovalores reais ou blocos 2x2 correspondendo a um par de autovalores complexos conjugados. Neste caso, S é chamada forma real de Schur e a transformação (1) é chamada decomposição real de Schur. Se na diagonal de S tivermos os autovalores com suas partes real e complexa, ou seja, uma matriz triangular superior, S é chamada forma complexa de Schur . A comutação de uma forma para outra é simples e efetuada via transformação ortonormal.

Os algoritmos que efetuam a decomposição de Schur não garantem qualquer ordenação dos autovalores. Como no método de redução empregado a ordenação dos autovalores é fundamental, utiliza-se rotinas adequadas para fazê-lo (Stewart, 1976).

O algoritmo mais comum para a obtenção da forma de Schur é o algoritmo QR. Antes do algoritmo QR ser aplicado, A é inicialmente transformada para a matriz superior de Hessenberg $H \in R^{nxn}$. Este algoritmo é muito eficiente e numericamente estável. Para maiores informações sobre a forma de Schur e sua computação, pode-se consultar referências sobre álgebra linear numérica, como (Golub e Van Loan, 1989; Stewart,1973), por exemplo.

3 - OBTENÇÃO DE MODELOS REDUZIDOS VIA FORMA DE SCHUR

Seja o sistema discreto linear multivariável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (2)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3)$$

onde $x_1(k)$ é o vetor de estados (rx1) a ser retido no modelo reduzido, $x_2(k)$ é o vetor de estados (n-rx1) a ser eliminado, $u(k)$ é o vetor de entrada (mx1). Procura-se um modelo reduzido de ordem r da forma

$$z(k+1) = Fz(k) + Gu(k) \quad (4)$$

tal que

$$z(k) = Hx(k) \quad (5)$$

onde F e G são as matrizes do modelo reduzido a serem determinadas. Define-se $H \in R^{rxn}$ como a matriz de agregação que representa a relação algébrica entre o sistema original e o reduzido. Aplicando-se (1) ao sistema (2), obtêm-se a forma complexa de Schur

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(k+1) \\ \overline{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1(k) \\ \overline{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (6)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(k) \\ \overline{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Em (6), os blocos da forma de Schur são ordenados de forma a ter-se os modos mais lentos do sistema em S_{11} e os modos mais rápidos em S_{22}. Portanto, o conjunto de estados $\overline{x}_1(k)$ possui uma dinâmica lenta ao passo que $\overline{x}_2(k)$ possue uma dinâmica rápida.

Os termos *modos lentos* e *modos rápidos* de um sistema discreto estão associados ao tempo de resposta do sistema, que por sua vez depende dos valores absolutos dos autovalores do sistema. Um modo é lento se o valor absoluto de seu autovalor associado é próximo de um. Por outro lado, os modos são tanto mais rápidos quanto mais próximos de zero forem seus valores absolutos (Bottura, 1982).

MÉTODO I

Neste método, supõe-se que os modos rápidos do sistema não têm dinâmica. De (6) , observa-se que $\overline{x}_2(k)$ representa a dinâmica rápida do sistema e não recebe influência de $\overline{x}_1(k)$, a dinâmica lenta. Supondo $\tilde{x}_2(k+1) = \tilde{x}_2(k)$, pode-se escrever

$$\tilde{x}_2(k) = (I_{n-r} - S_{22})^{-1} P_2 u(k) \tag{8}$$

De (7), tem-se que

$$x_2(k) = Q_4^{-T} \bar{x}_2(k) - Q_4^{-T} Q_2^T x_1(k) \tag{9}$$

e de (2)

$$x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + A_2 x_2(k) + B_1 u(k) \tag{10}$$

<u>Observação</u>: de (7) tem-se que posto $[Q_3^T \ \ Q_4^T] = n - r$ de onde se conclui facilmente que posto $(Q_4^T) = n - r$, garantindo a invertibilidade de Q_4^T, cuja inversa é denotada por Q_4^{-T}.

De (8) e (9) pode-se, portanto, obter uma expressão para $x_2(k)$, que substituída em (10) com $z(k) \simeq x_1(k)$ dá

$$\begin{aligned} z(k+1) &= (A_1 - A_2 Q_4^{-T} Q_2^T) z(k) + \\ &(B_1 + A_2 Q_4^{-T} (I_{n-r} - S_{22})^{-1} P_2) u(k) \end{aligned} \tag{11}$$

Comparando esta expressão com (4) vem

$$F = A_1 - A_2 Q_4^{-T} Q_3^T = A_1 + A_2 Q_3 Q_1^{-1} \tag{12}$$

$$G = B_1 + A_2 Q_4^{-T} (I_{n-r} - S_{22})^{-1} P_2 \tag{13}$$

Portanto, uma vez obtida a decomposição de Schur Q , as matrizes do modelo reduzido são obtidas diretamente de (12) e (13). Para entradas constantes, z(k) apresentará valores de regime iguais aos de $x_1(k)$, ao passo que para entradas variantes no tempo haverá um pequeno erro entre a resposta do sistema reduzido e a do original.

MÉTODO II

Este método baseia-se na suposição de que os modos rápidos tem pouca influência na resposta do sistema. Isto causa um pequeno erro de regime entre a resposta do modelo original e do reduzido. Em Munaro (1990) é discutida uma estratégia simples que permite corrigir este erro. Para obter o modelo reduzido, escreve-se a resposta do sistema (2) ao estado zero ,

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \tag{14}$$

Usando (1) em (14), vem

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = Q \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}^t Q^T \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \tag{15}$$

Como se observa, o conjunto de modos rápidos associados a S_{22} não pode ser desprezado devido a existência do bloco S_{12}, o qual representa uma interação entre o conjunto de modos lentos e rápidos. Procura-se então uma matriz P da forma

$$P = \begin{bmatrix} I_r & T \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{16}$$

tal que

$$PSP^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Substituindo (17) em (15) , vem

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = QP^{-1} \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}^t PQ^T \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \tag{18}$$

Desprezando agora o efeito dos modos rápidos na resposta, ou seja, fazendo $S_{22} = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} \sum_{t=0}^{k-1} S_{11}^t [\ I_r \quad T\ ] Q^T B u(t) \tag{19}$$

com

$$\begin{aligned} z(k) &\simeq x_1(k) \\ \tilde{x}(k) &\simeq x_2(k) \end{aligned} \tag{20}$$

Definindo

$$\gamma = \sum_{t=0}^{k-1} S_{11}^t [\ I_r \quad T\ ] Q^T B u(t) \tag{21}$$

vem

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} \gamma \tag{22}$$

e

$$\gamma = Q_1^{-1} z(k)$$

$$\tilde{x}(k) = Q_3 Q_1^{-1} z(k) \tag{23}$$

Para obter F e G de (4) faz-se :

1) u(k) = 0

Com u(k)=0 e (20) , obtêm-se, de (10)

$$z(k+1) = (A_1 + A_2 Q_3 Q_1^{-1}) z(k) \tag{24}$$

Logo, a matriz de sistema F do modelo reduzido é igual a obtida pelo método anterior.

2) x(0) = 0
De (19), vem

$$\begin{aligned} z(k) &= \textstyle\sum_{t=0}^{k-1} Q_1 S_{11}^t [\ I_r \quad T\ ] Q^T B u(t) \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{k-1} Q_1 S_{11}^t Q_1^{-1} [\ Q_1 \quad Q_1 T\ ] Q^T B u(t) \end{aligned} \tag{25}$$

A resposta de (4) ao estado zero é dada por

$$z(k) = \sum_{t=0}^{k-1} F^t G u(t) \tag{26}$$

De AQ=QS chega-se facilmente a expressão

$$F = A_1 + A_2 Q_3 Q_1^{-1} = Q_1 S_{11} Q_1^{-1} \tag{27}$$

Comparando (26) e (25) usando (27), obtem-se

$$G = Q_1 [\ I_r \quad T\ ] Q^T B \tag{28}$$

Resta agora a obtenção da matriz T , para que se possa calcular G usando (28). Usando (16) em (1) têm-se que

$S_{11} T = T S_{22} + S_{12}$

ou na forma matricial , com $m = n - r$

$$\begin{bmatrix} S11_{11} & S11_{12} & S11_{13} & \cdots & S11_{1r} \\ 0 & S11_{22} & S11_{23} & \cdots & S11_{2r} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S11_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{2m} \\ . & . & . & \cdots & . \\ T_{r1} & T_{r2} & T_{r3} & \cdots & T_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{2m} \\ . & . & . & \cdots & . \\ T_{r1} & T_{r2} & T_{r3} & \cdots & T_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S22_{11} & S22_{12} & S22_{13} & \cdots & S22_{1m} \\ 0 & S22_{22} & S22_{23} & \cdots & S22_{2m} \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & . & S22_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S12_{11} & S12_{12} & S12_{13} & \cdots & S12_{1m} \\ S12_{21} & S12_{22} & S12_{23} & \cdots & S12_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ S12_{r1} & S12_{r2} & S12_{r3} & \cdots & S12_{rm} \end{bmatrix} \tag{29}$$

A forma especial destas matrizes permite obter os elementos de T facilmente. Assim, temos

$$T_{ij} = \frac{S12_{ij} - \sum_{k=i}^{r-1} S11_{ik} T_{kj} + \sum_{l=1}^{j-1} T_{il} S22_{lj}}{S11_{ii} - S22_{jj}} \qquad i = r, \cdots, 1 \quad j = 1, \cdots, m \tag{30}$$

Percebe-se que este método exige um esforço um pouco maior que o método anterior para se chegar ao modelo reduzido. Entretanto, este esforço consiste na obtenção da forma complexa de Schur e no cálculo dos rxm elementos da matriz T usando (30), uma tarefa que envolve um número finito de operações elementares . A única restrição para este método é que o bloco S_{11} nao tenha autovalores iguais aos do blocoS_{22} como pode ser visto na equação (30). Esta restrição é fraca, devido a forma como os autovalores são agrupados nestes blocos: os próximos do círculo unitário em S_{11} e os próximos de zero em S_{22}.

4 - EXEMPLO

Sejam A ,B e C as matrizes de um modelo discreto multivariável, dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00000 \\ 0.00015 & -0.02100 & 0.75360 & -2.46150 & 2.74000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C = [\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

Fazendo a decomposição de Schur deste sistema , obtêm-se

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2911 & -0.7414 & 0.5417 & 0.2685 & 0.0031 \\ 0.3493 & -0.4028 & -0.3734 & -0.7356 & -0.1876 \\ 0.4192 & -0.0936 & -0.5365 & 0.3620 & 0.6298 \\ 0.5031 & 0.1996 & -0.1961 & 0.4096 & -0.7077 \\ 0.6037 & 0.4893 & 0.4908 & -0.2965 & 0.2595 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.2000 & 0.6550 & 0.7326 & -0.9902 & 1.7690 \\ 0 & 0.8004 & 1.3095 & -0.4477 & 1.4378 \\ 0 & 0.0000 & 0.7095 & -1.4473 & 1.4309 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0174 & -1.5329 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.0127 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores do sistema podem ser expressos aproximadamente por

$\lambda(S_{11}) \simeq (1.2, 0.8, 0.71)$ e

$\lambda(S_{22}) \simeq (0.0174, 0.0127)$

Pode-se aplicar o método I retendo no modelo reduzido os modos associados a S_{11}, uma vez que os valores absolutos dos autovalores de S_{11} estão próximos de um, enquanto os de S_{22} estão próximos de zero.Usando (12) e (13)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.6815 & -2.3799 & 2.7100 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0307 \\ 0 & 0 & -1.7935 \end{bmatrix}^T$$

Para aplicar o método II, deve-se obter a forma complexa de Schur. Entretanto, como neste caso os autovalores são todos reais as formas são idênticas. Podemos então obter a matriz T usando (30)

$$T = \begin{bmatrix} -1.1621 & 7.1194 \\ 2.9255 & -14.9281 \\ -2.0912 & 6.6539 \end{bmatrix}$$

Usando T em (28) , obtêm-se G para o método II (uma vez que F é igual para os dois métodos),

$$G = \begin{bmatrix} 5.5034 & 1.6299 & 0.0478 \\ -13.4494 & -4.4181 & -0.1298 \end{bmatrix}^T$$

5 - CONCLUSÃO

Nos métodos de redução propostos, busca-se utilizar procedimentos que garantam robustez e estabilidade numérica. Isto é alcançado, uma vez que para para se obter os modelos de ordem reduzida, computa-se a forma de Schur (método I) seguida de operações algébricas elementares (método II).

Os modelos reduzidos obtidos pelos dois métodos são idênticos aos obtidos por agregação modal, como em (Wilson, Fisher e Seborg, 1972). Em (Pernebo e Silverman, 1982), uma comparação entre os métodos de Agregação Modal e de Transformação Balanceada é feita. Os métodos aqui propostos possuem as características dos métodos de agregação lá descritos com a vantagem de apresentar estabilidade numérica e requerer menor esforço computacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aoki, M. (1968). Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-13, p.246.

Arbel, A.e E.Tse (1979). Reduced Order Models , Canonical Forms and Observers. *Int. J. Control*, vol.30, p.513.

Bottura, C.P. e C.J.Munaro, (1991). Discrete Multivariable Systems Order Reduction via Schur Decomposition. *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.

Bottura, C.P. (1982) *Análise Linear de Sistemas*, Ed.Guanabara Dois.

Davison, E.J. (1966). A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-11, p.93.

Drenick, P.E. (1975). On the Decomposition of State Space, *IEEE Trans. on Automatic Control*, pp.269-271.

Flam, D.S. e R.A.Walker (1982). Remark on algorith 506. *ACM Trans. Math. Software*, V.8, p219.

Golub, G.H. e J.H.Wilkinson (1976). Ill-conditioned Eigensystems and the computation of the Jordan Canonical form. *Siam Rev.*, V.8, p.578.

Golub, G.H. e C.F.Van Loan (1989) *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press.

Jamshidi, M. (1983) *Large Scale Systems Modeling and Control*, North Holland, New York, pp.23-30.

Lastman, G.J. e N.K.Sinha (1985). A Comparison of the Balanced Matrix Method and the Aggregation Method for Model Reduction, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30, p.301.

Marshall,S.A. (1966). An Approximate Method for Reducing the Order of a Linear System. *Control*, 10, p.642.

Moore, B.C. (1981). Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-26, p.17.

Munaro, C.J (1990) *Contribuição à Redução de Ordem e Controle de Sistemas Discretos Multivariáveis.* Tese de Mestrado. UNICAMP.

Pernebo, L. e L.M.Silverman (1982). Model Reduction via Balanced State Space Representation. *IEEE Trans. on Automatic Control.* AC-27, p.382.

Rabah, W.A. e H.K.Khalil (1989). A Real Schur Form Method for Modeling Singularly Perturbed Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-34, p.856.

Safonov M.G. e R.Y.Chiang (1989). A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction.*IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-34, p.729.

Smith, B.T. e outros (1990) *Matrix Eigensystems Routines - EISPACK Guide 2nd ed.*,V.6. New York:Springer-Verlag.

Stewart, G.W. (1973) *Introduction to Matrix Computation.* New York Academic.

Stewart, G.W. (1976). Algorith 506:HQR# and EXCHG:Fortran Subroutines for calculating and ordering the eigenvalues of a real upper Hessenberg matrix.*ACM Trans. Math. Software*, V.2 ,p.275,

Tse, E.C.Y., J.V.Medanic e W.R.Perkins (1977). Chained Aggregation of Linear Time Invariant Systems. *Proc. JACC*, San Francisco.

Wilson, R.G., D.G.Fisher e D.E.Seborg (1972). Model Reduction For Discrete Time Systems. *Int. J. Control*, vol.16, p.519.