

Sociedade Brasileira de Automática

***10º Congresso Brasileiro de Automática
6º Congresso Latino-Americano de Automática***

Minicurso

Introdução ao Controle Ótimo no Domínio da Frequência

Gilberto Oliveira Corrêa
LNCC/CNPq
Rua Lauro Müller 455
22290-160 - Rio de Janeiro, RJ

19-23 de setembro, 1994
Rio de Janeiro

Sumário

1. Introdução	155
2. Estabilidade de sistemas de controle	157
3. Controle ótimo quadrático	165
4. Margem de estabilidade e otimização em H_∞	183
Referências Bibliográficas	206

1. Introdução

O objetivo destas notas é apresentar, de modo introdutório, alguns problemas de controle ótimo para sistemas lineares, formulados a partir de descrições matemáticas dos mesmos em termos de funções de transferência (ou seja, no “domínio da frequência”). Este tópico foi retomado em meados da década de 70 nos trabalhos de Shaked (1976) e Youla, Jabr & Bongiorno (1976 a,b) - onde foram considerados problemas de otimização cujos funcionais de custo consistem, essencialmente, da soma de normas quadráticas ponderadas de várias funções de transferência em malha fechada - após um longo período no qual predominaram formulações baseadas em equações de estado (ou seja, “no domínio do tempo”). Cabe ressaltar que a dicotomia “domínio do tempo/domínio da frequência” é, em certa medida, uma questão de perspectiva uma vez que, passando-se de funções de transferências para suas realizações por equações de estado, pode-se converter uma formulação no domínio da frequência em sua contrapartida no domínio do tempo - de fato, faz-se, atualmente uso corrente destas equivalências de modo a poder tratar cada subproblema no ambiente mais adequado à sua solução.

A linha de pesquisa iniciada pelos trabalhos acima mencionados (que se poderia genericamente denominar “controle H_2 de sistemas lineares”) teve continuidade nos trabalhos de Youla & Bongiorno (1985), Park & Bongiorno (1989), Park & Bongiorno (1990), onde generalizações da formulação original foram tratadas - configurações mais gerais para sistemas de controle foram aí consideradas englobando controladores com dois graus de liberdade e/ou processos com funções de transferência a quatro blocos.

Um dos trabalhos iniciais desta seqüência, Youla et al. (1976b) introduziu a perspectiva de “parametrização dos controladores estabilizantes” que veio tornar-se um componente fundamental na literatura de teoria de controle linear na década de 80. Esta perspectiva, associada à introdução das “fatorações racionais” por Desoer et al. (1979) e Vidyasagar (1985), e uma nova formulação proposta por Zames (1981) confluíram para o que se tornou uma das subáreas de teoria de controle mais estudadas na década de 80 e que se poderia denominar “controle H_∞ de sistemas lineares” - uma vasta coleção de artigos foi (e tem sido) escrita sobre este tópico e a monografia de Francis (1987) apresenta de forma concisa um panorama do trabalho realizado até 1986.

Pretende-se, nestas notas, apresentar de forma *elementar*, os componentes básicos das formulações acima mencionadas e a resolução de alguns dos problemas aí compreendidos. Mais especificamente, serão completamente desenvolvidas as soluções para

- (i) o problema de controle ótimo H_2 (à la Youla) para a configuração processo/controlador mais geral, i.e.; processo multivariável com função de transferência a quatro blocos e controlador com dois graus de liberdade.
- (ii) o problema H_∞ monovariável de maximização da margem de estabilidade relativa a uma classe de perturbações não-estruturadas, através da resolução do chamado problema de Nehari - qual seja, o problema de aproximação de uma função de transferência instável por uma estável, onde o critério de aproximação é o supremo do módulo do erro sobre o eixo $j\omega$.

Estas notas estão organizadas da seguinte forma: na seção 2, resultados básicos relativos à estabilização nominal e robusta de sistemas de controle em malha-fechada são apresentados de forma concisa para tornar explícitos o contexto e os pressupostos para as seções subseqüentes; na seção 3, o problema H_2 multivariável (à la Youla) é formulado e resolvido em detalhe e na seção 4 o problema H_∞ monovariável mencionado acima é também formulado e resolvido.

2. Estabilidade de sistemas de controle por retroalimentação

Objetivos desta seção: Definir estabilidade de um sistema de controle (P, C) ; apresentar condições necessárias e suficientes sobre um dado P para que exista um controlador C tal que (P, C) seja estável, e uma parametrização de todos os controladores C para os quais (P, C) é estável; apresentar condições necessárias e suficientes sobre um controlador C para que $(P + E, C)$ seja estável para todo E cuja “magnitude” seja inferior a um valor pré-especificado.

2.1 Estabilização nominal

Considere-se um sistema de controle linear representado esquematicamente por

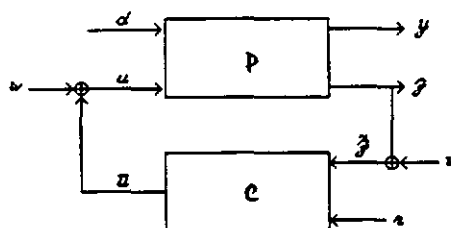


Figura 1

onde \mathcal{P} e \mathcal{C} são descritos por

$$\mathcal{P} : \begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(s)P_3(s) \\ P_2(s)P_4(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathcal{C} : \bar{u}(s) = [C_1 : C_2] \begin{bmatrix} r \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = C(s) \begin{bmatrix} r \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad s \in \mathcal{C} \quad (2)$$

o símbolo “ \oplus ” na Figura 1 significa adição, i.e.,

$$\tilde{z}(s) = z(s) + v(s) \quad , \quad u(s) = \bar{u}(s) + w(s) \quad (3)$$

P_i, C_j são matrizes cujos elementos pertencem ao conjunto

$$R_p \triangleq \{f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \mid f \text{ é real-rational e própria}\}$$

(i.e., f é uma fração sobre o anel de polinômios de coeficientes reais e existe o limite de $f(s)$ quando $s \rightarrow \infty$).

As variáveis denotadas por u, d, y e z são, respectivamente, as chamadas variáveis de controle, perturbação, controlada e de medida. Consideram-se ainda duas outras variáveis, v e w - a primeira leva em conta erros/ruído no processo de tornar z fisicamente acessível ao controlador ou no processo de medir os valores assumidos por z ; enquanto que w leva em conta erros/ruído no processo de impor à variável u os valores prescritos pelo controlador para a mesma.

O sistema de controle da Figura 1 é descrito pela aplicação que, a partir dos valores das variáveis externas (ou exógenas) r, w, d e v , permite determinar os valores das variáveis dependentes y, u e z , ou seja, pela aplicação $(r(\cdot), w(\cdot), d(\cdot), v(\cdot)) \mapsto (y(\cdot); u(\cdot), z(\cdot))$.

A partir das equações (1) - (3), esta aplicação pode ser expressa por

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{yr} & F_{yw} & F_{yd} & F_{yv} \\ F_{ur} & F_{uw} & F_{ud} & F_{uv} \\ F_{zr} & F_{zw} & F_{zd} & F_{zv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \\ d \\ v \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde

$$\begin{bmatrix} F_{yr} & F_{yw} & F_{yv} \\ F_{ur} & F_{uw} & F_{uv} \\ F_{zr} & F_{zw} & F_{zv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ I \\ P_2 \end{bmatrix} (I - C_2 P_2)^{-1} [C_1 \quad I \quad C_2]$$

$$\begin{bmatrix} F_{yd} \\ F_{ud} \\ F_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ I \\ P_2 \end{bmatrix} (I - C_2 P_2)^{-1} C_2 P_4 + \begin{bmatrix} P_3 \\ O \\ P_3 \end{bmatrix}$$

(o argumento s das funções acima omitido) para toda matriz C de elementos em R_p tal que $\det [I - C_2(s)P_2(s)] \neq 0$ e $[I - C_2(\infty)P_2(\infty)]$ é não-singular - observe que para tais $C_2, (I - C_2 P_2)^{-1} \in M(R_p)$ onde $M(R_p)$ denota o conjunto das matrizes (de dimensões apropriadas) com elementos em R_p .

A idéia básica para a definição de estabilidade (externa) de um sistema de controle como o da Figura 1 é que a qualquer quádrupla de funções $(r(\cdot), w(\cdot), d(\cdot), v(\cdot))$ limitadas em $[0, \infty]$ correspondam $y(\cdot), u(\cdot)$ e $z(\cdot)$ também limitadas em $[0, \infty]$. No contexto das equações (2.1) e (2.2) onde as relações entre as funções $r(\cdot), w(\cdot), d(\cdot), v(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)$ e $z(\cdot)$ são dadas através das respectivas transformadas e onde P e $C \in M(R_p)$, esta noção de estabilidade é apreendida na seguinte definição.

Definição 1: O sistema (P, C) da Figura 1 (ou o par (P, C)) é dito estável se

$\det[I - C_2(\infty)P_2(\infty)] \neq 0$ e $F(P, C)$ é uma matriz de funções real-rationais, próprias e sem polos no semiplano da esquerda e no eixo imaginário, i.e., $F(P, C) \in M(S)$ onde

$$S \triangleq \{f \in R_p : \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} |f(s)| < \infty\} \quad \nabla$$

As perguntas a serem aqui consideradas são, naturalmente, as seguintes:

- (i) dado $P \in M(R_p)$ que condições devem ser satisfeitas por $C \in M(R_p)$ para que o par (P, C) seja estável;
- (ii) sob que condições em P existe $C \in M(R_p)$ tal que (P, C) é estável;
- (iii) quando existe $C \in M(R_p)$ tal que (P, C) é estável, como caracterizar todos os controladores estabilizantes, i.e., todos os $C \in M(R_p)$ tais que (P, C) é estável.

Estas perguntas são completamente respondidas no teorema enunciado abaixo (devido, essencialmente, a Nett (1986)). Como este teorema baseia-se em fatorações coprimas em $M(S)$, a definição correspondente é aqui reproduzida para conveniência do leitor.

Definição 2: (a) $N \in M(S)$ e $D \in M(S)$ são ditas coprimas à direita (c.o.d.) se existem $X \in M(S)$ e $Y \in M(S)$ tais que $XN + YD = I$.

(b) $\tilde{N} \in M(S)$ e $\tilde{D} \in M(S)$ são ditas coprimas à esquerda (c.o.e.) se existem $\tilde{X} \in M(S)$ e $\tilde{Y} \in M(S)$ tais que $\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I$. \(\nabla\)

Pode-se então enunciar o seguinte resultado fundamental.

Fato 0 (Vidyasagar, 1985): Seja $\Gamma \in M(R_p)$. Existem $N_\delta, D_\gamma, \tilde{N}_\gamma$ e $\tilde{D}_\gamma \in M(S)$ tais que N_γ e D_δ são c.o.d., e \tilde{N}_γ e \tilde{D}_γ são c.o.e., e

$$\Gamma = N_\delta D_\gamma^{-1} = \tilde{D}_\gamma^{-1} \tilde{N}_\gamma \quad \nabla$$

Enuncia-se a seguir um teorema que resolve o problema de estabilização por retroalimentação. Neste teorema são apresentadas condições necessárias e suficientes para estabilidade e uma parametrização explícita do conjunto de todos os controladores estabilizantes. Uma demonstração elementar do mesmo pode ser encontrada em Corrêa (1992).

Teorema 1: Sejam $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_i \in M(R_p)$, $P_i = N_i D_i^{-1} = \tilde{D}_i^{-1} \tilde{N}_i$ fatorações coprimas em $M(S)$.

- (a) Existe $C \in M(R_p)$ tal que (P, C) é estável (i.e., P é estabilizável) se e somente se
- (a.1) Existe $M_{12} \in M(S)$ tal que $D_2 = D_1 M_{12}$
- (a.2) Existe $\tilde{M}_{24} \in M(S)$ tal que $\tilde{D}_2 = \tilde{M}_{24} \tilde{D}_4$
- (a.3) Para todo (ou para algum) par (X, Y) e $M(S) \times M(S)$ tal que $X N_2 + Y D_2 = I$, $(P_3 - P_1 D_2 X P_4) \in M(S)$.
- (b) Para um dado $P \in M(R_p)$ que satisfaça (a.1) - (a.3), o conjunto $S_c(P)$ de todos os $C \in M(R_p)$ tais que (P, C) é estável é dado por

$$S_c(P) = \{C = (K \tilde{N}_2 + Y_0)^{-1} [R : (K \tilde{D}_2 - X_0)] : R \in M(S), K \in M(S) \text{ tal que } [K \tilde{N}_2 + Y_0](\infty) \text{ é não-singular} \}$$

onde $(X_0, Y_0) \in M(S) \times M(S)$ é uma solução particular de $X N_2 + Y D_2 = I$.

- (c) O conjunto correspondente das matrizes $F(P, C)$ é parametrizado de forma afim por $(R, K) \in M(S) \times M(S)$ da seguinte forma:

$$F(P, C(R, K)) = T(R, K) = \begin{bmatrix} \check{N}_1 R : \check{N}_1 (K \tilde{N}_2 + Y_0) : \check{N}_1 K \tilde{N}_4 + H_0 & : \check{N}_1 (K \tilde{D}_2 - X_0) \\ D_2 R : D_2 (K \tilde{N}_2 + Y_0) : D_2 K \tilde{N}_4 + H_1 \check{N}_4 & : D_2 (K \tilde{D}_2 - X_0) \\ N_2 R : N_2 (K \tilde{N}_2 + Y_0) : N_2 K \tilde{N}_4 + H_2 \check{N}_4 & : N_2 (K \tilde{D}_2 - X_0) \end{bmatrix}$$

onde $\check{N}_1 \triangleq N_1 M_{12}$, $\check{N}_4 \triangleq \tilde{M}_{24} \tilde{N}_4$, $H_0 \triangleq P_3 - P_1 D_2 X_0 P_4$, $H_1 \triangleq D_2 X_0 \tilde{D}_2^{-1}$, $H_2 \triangleq (I - N_2 X_0) \tilde{D}_2^{-1}$, $H_i \in M(S)$, $i = 0, 1, 2$. ▽

Comentários:

- (1) A parametrização dos controladores estabilizantes dada no Teorema 1(b) é conhecida como parametrização de Youla. Isto se deve ao fato de Youla, Bongiorno e Yabr (1976) terem obtido pela primeira vez uma parametrização deste tipo - para o caso em que $z \equiv y$ e $d \equiv w$ (i.e., $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$) e com base em fatorações de matrizes racionais onde os fatores são matrizes polinomiais e não elementos de $M(S)$.

Fatorações de matrizes racionais onde os fatores são elementos de $M(S)$ foram introduzidas por Desoer et al. (1980) e extensivamente estudadas por Vidyasagar (1985).

O caso de P com quatro blocos distintos foi tratado por Nett (1986), usando fatorações em $M(S)$.

- (2) Para computar as matrizes que definem a parametrização acima para um dado P , é necessário obter fatorações coprimas (N_2, D_2) e $(\tilde{N}_2, \tilde{D}_2)$ e encontrar uma solução (particular) (X_0, Y_0) da equação $XN_2 + YD_2 = I$ sobre $M(S) \times M(S)$. Métodos computacionais efetivos para estes fins baseiam-se em realizações de P_2 , i.e., matrizes (A_2, B_2, C_2, D_2) tais que

$$P_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

que definem equações de estado lineares correspondentes à aplicação $u \mapsto z = P_2u$ (ver Nett et al. (1984)).

- (3) A utilidade desta parametrização deve-se em grande parte ao fato de $\mathcal{T}(R, K)$ ser afim em (R, K) . Isto viabiliza a resolução de problemas de otimização formulados a partir dos objetivos básicos para projeto de sistemas de controle tais como fazer com que “ y seja próximo de r ” (i.e., tornar $I - \tilde{N}_1 R$ “pequeno” pela escolha apropriada de R) e atenuar os efeitos das perturbações d, v, w (i.e., tornar $\tilde{N}_1(K\tilde{N}_2 + Y_0)$, $(\tilde{N}_1 K\tilde{N}_4 + H_0)$ e $\tilde{N}_1(K\tilde{D}_2 - X_0)$ “pequenos” pela escolha apropriada de K).

Apresenta-se agora um corolário do Teorema 1, no qual se estabelece uma condição sobre C , freqüentemente encontrada na literatura, para que (P, C) seja estável.

Corolário 1: Seja $P \in M(R_p)$ estabilizável e (N_2, D_2) uma (particular) fatoração c.o.e. de P_2 (i.e., $P_2 \doteq N_2 D_2^{-1}$). $C \in M(R_p)$ é tal que (P, C) é estável se e somente se

$$C = \tilde{D}_c^{-1}[\tilde{N}_{1c} \dot{\tilde{N}}_c]$$

para algum par $(\tilde{N}_c, \tilde{D}_c) \in M(S) \times M(S)$ tal que $-\tilde{N}_c N_2 + \tilde{D}_c D_2 = I$. ▽

Demonstração: Se (P, C) é estável então, pelo Teorema 1, $C = \tilde{D}_c(K)^{-1}[R \dot{\tilde{N}}_c(K)]$ para algum $K \in M(S)$ onde $\tilde{N}_c(K) \triangleq K\tilde{D}_2 - X_0$ e $\tilde{D}_c(K) \triangleq K\tilde{N}_2 + Y_0$. Portanto

$$-\tilde{N}_c(K)N_2 + \tilde{D}_c(K)D_2 = -K\tilde{D}_2 N_2 + X_0 N_2 + K\tilde{N}_2 D_2 + Y_0 D_2 = I + K(\tilde{N}_2 D_2 - \tilde{D}_2 N_2) = I.$$

Por outro lado, se $-\tilde{N}_c N_2 + \tilde{D}_c D_2 = I$, segue-se da solução geral da equação

$XN_2 + YD_2 = I$, que, para algum $\check{K} \in M(S)$,

$$(-\check{N}_c) = X_0 + \check{K}\check{D}_2, \check{D}_c = Y_0 - \check{K}\check{N}_2;$$

portanto, tomando-se $\bar{K} = -\check{K}$, tem-se

$$\bar{N}_c = -X_0 + \bar{K}\check{D}_2, \bar{D}_c = Y_0 + \bar{K}\check{N}_2, \text{ para algum } \bar{K} \in M(S) \quad \square$$

Para concluir esta seção, note-se que, para P estabilizável, as condições a serem satisfeitas por C para que (P, C) seja estável dizem respeito exclusivamente a P_2 (este fato fica evidenciado pelo Corolário 1). Assim sendo, e tendo em vista que a partir deste ponto P será sempre estabilizável, " (P_2, C) " substituirá " (P, C) " sempre que questões relativas a estabilidade forem consideradas.

2.2 Estabilização robusta

No sentido de levar em conta o caráter de aproximação inerente ao processo de construção de modelos matemáticos, é conveniente investigar não somente a estabilidade de sistemas de controle (P_2, C) , para um dado P_2 , mas também a estabilidade de (\check{P}_2, C) para qualquer \check{P}_2 em certos conjuntos que contém P_2 . Nesta linha, a questão básica tratada nesta seção é da robustez da estabilidade em relação a uma classe de modelos S_p , ou seja:

Dados $P_2 \in M(R_p)$ e $S_p \subset M(R_p)$ tais que $P_2 \in S_p$, que condições devem ser satisfeitas por $C \in M(R_p)$ para que, para todo $\check{P}_2 \in S_p$, (\check{P}_2, C) seja estável.

Cabe ressaltar que esta questão está associada a uma das motivações básicas para o uso de controle por retroalimentação, qual seja: utilizar observações *on line* relativas ao comportamento do sistema controlado, quais sejam $\{z(\tau) : z \leq t\}$ (i.e., retroalimentação), para alcançar os objetivos desejados (no caso, estabilidade) a despeito de imprecisões na obtenção do modelo P .

No sentido de simplificar a exposição que se segue, apenas erros estáveis em P_2 serão considerados (ao invés de se considerar erros nos fatores coprimos de P_2). As incertezas no processo de obtenção de um modelo matemático P_2 são representadas por erros aditivos não-estruturados cujas magnitudes tem limitações superiores conhecidas (ou estimadas).

Especificamente, considera-se que $P_2 \in S_p(P_2^0, \gamma)$ onde

$$\begin{aligned} S_p(P_2^0, \gamma) &= \{P_2 = P_2^0 + E : E \in M(S) \text{ , } \|W_\ell E W_r\|_\infty < \gamma\} \\ P_2^0 &\in M(R_p) \text{ , } \gamma > 0 \text{ , } W_\ell \in U(S) \text{ , } W_r \in U(S) \\ U(S) &= \{G \in M(S) : G^{-1} \in M(S)\} \end{aligned}$$

e deseja-se obter condições sobre $C \in M(R_p)$ para que, para todo $P_2 \in S_p(P_2^0, \gamma)$, (P_2, C) seja estável. Este problema é resolvido no teorema enunciado a seguir para o qual uma demonstração elementar pode ser encontrada em Corrêa (1992).

Teorema 2: Sejam $P_2^0 \in M(R_p)$, $C \in M(R_p)$, $N_2^0 \in M(S)$ e $D_2^0 \in M(S)$ c.o.d. tais que $P_2^0 = N_2^0(D_2^0)^{-1}$.

Sejam $\tilde{N}_c(K) \triangleq K\tilde{D}_2^0 - X_0$, $\tilde{D}_c(K) \triangleq K\tilde{N}_2^0 - X_0$ e $\tilde{Q}_2^0(K) \triangleq \tilde{W}_r D_2^0 \tilde{N}_c(K) \tilde{W}_\ell$. (P_2, C) é estável para todo $P_2 \in S_p(P_2^0, \gamma)$, onde $\gamma > 0$, se e somente se $C = \tilde{D}_c(K)^{-1}[\tilde{N}_{1c} : \tilde{N}_c(K)]$ para algum $K \in M(S)$ tal que $\|\tilde{Q}_2^0(K)\|_\infty \leq 1/\gamma$. ∇

O Teorema 2 dá condições necessárias e suficientes sobre C para que o sistema de controle permaneça estável em presença de erros estáveis E no modelo P_2^0 cujas “magnitudes sejam limitadas por γ ” (no sentido de $\|W_\ell E W_r\|_\infty < \gamma$). Uma pergunta praticamente equivalente àquela respondida pelo Teorema 2 (e de grande motivação do ponto de vista de engenharia) é, a grosso modo, a seguinte: dados $P_2^0 \in M(R_p)$ e $C \in M(R_p)$ tais que (P_2^0, C) é estável qual é a maior limitação sobre a “magnitude” de erros estáveis E (no sentido de $\|W_r E W_\ell\|_\infty$) sob a qual a estabilidade de $(P_2^0 + E, C)$ pode ser assegurada. Questões deste tipo dão origem, na literatura de controle, ao termo “margem de estabilidade”. No sentido de apresentar o resultado dado pelo Teorema 2 sob este ângulo, introduz-se agora uma definição de margem de estabilidade.

Definição 1: Sejam $P_2^0 \in M(R_p)$ e $C \in M(R_p)$ tais que (P_2^0, C) é estável; considere-se uma família de classes de modelos $\{S(\alpha) : \alpha > 0\}$ tais que $\forall \alpha > 0$ $S(\alpha) \subset M(R_p)$, $P_2^0 \in S(\alpha)$ e $\forall \alpha_2 > \alpha_1$, $S(\alpha_1) \subset S(\alpha_2)$. A margem de estabilidade ν do sistema de controle (P_2^0, C) relativa à família $\{S(\alpha) : \alpha > 0\}$ é definida por

$$\nu = \sup\{\alpha > 0 : \forall P_2 \in S(\alpha) \text{ , } (P_2, C) \text{ é estável}\} \quad \nabla$$

Pode-se então enunciar o seguinte Corolário do Teorema 2.

Corolário 2: Sejam P_2^0 , N_2^0 e D_2^0 como no Teorema 1, $C = \tilde{D}_c(K)^{-1}[\tilde{N}_{1c}:\tilde{N}_c(K)]$ para algum $K \in M(S)$. A margem de estabilidade do sistema (P_2^0, C) relativa à família $\{S_p(P_2^0, \alpha) : \alpha > 0\}$ é igual a $\frac{1}{\|\tilde{Q}_2^0(K)\|_\infty}$. ∇

Para concluir esta seção é interessante observar que a condição $\|\tilde{Q}_2^0(K)\|_\infty \leq 1/\gamma$ assegura a estabilidade dos sistemas de controle (P_2, C) para classes mais gerais que $S_p(P_2^0, \alpha)$ desde que P_2^0 não tenha polos no eixo imaginário. Na realidade, sob esta hipótese relativa a P_2^0 , o Teorema 2 e o Corolário 2 permanecem válidos se a classe $S_p(P_2^0, \alpha)$ for substituída por

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p(P_2^0, \alpha) \triangleq \{ & P_2 = P_2^0 + E : E \in M(R_p) \text{ sem polos no eixo imaginário} \\ & \text{tal que } (P_2^0 + E) \text{ e } P_2^0 \text{ tem o mesmo número de polos em} \\ & \mathcal{C}_+, \text{ e } \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \|(W_e E W_e)(j\omega)\| < \gamma \} \end{aligned}$$

(cf. Doyle & Stein (1981), Chen & Desoer (1982) e Glover (1986)).

3. Controle ótimo quadrático

Objetivos desta seção: Expressar o objetivo básico de “tornar y próximo a r a despeito dos efeitos de d , v e w ” em termos de um problema de otimização quadrática definido sobre o conjunto dos controladores estabilizantes. Apresentar condições para a existência e unicidade de solução e caracterizá-la explicitamente.

Nesta seção estuda-se a questão da escolha de um controlador estabilizante C através de problemas de otimização quadrática, tendo em vista os objetivos básicos de tornar y “próximo” a r a despeito dos efeitos de w , d e v (ver Figura 1, seção 2). Considere-se, neste sentido, o sistema de controle representado esquematicamente na Figura 1 (seção 2), onde o bloco \mathcal{P} é caracterizado por $P \in M(R_p)$ estabilizável. Pelo Teorema 2.1, para um controlador estabilizante $C = \tilde{D}_c(K)^{-1}[R \ ; \ \tilde{N}_c(K)]$, onde $R \in M(S)$, $K \in M(S)$, a “variável controlada” y tem seus valores determinados pelas variáveis exógenas r , w , d e v através da equação

$$y = F_{yr}(C)r + F_{yw}(C)w + F_{yd}(C)d + F_{yv}(C)v, \quad \text{ou seja,}$$

$$y = \tilde{N}_1 R r + [\tilde{N}_1(K\tilde{N}_2 + Y_0)]w + [\tilde{N}_1 K \tilde{N}_4 + H_0]d + [\tilde{N}_1(K\tilde{D}_2 - X_0)]v \quad (1)$$

Devido à linearidade, o efeito de cada variável exógena corresponde a um dos termos no lado direito da equação (1). Assim, tornar y “próximo” a r a despeito das “variáveis de perturbação” w , d e v resume-se a tornar $(I - \tilde{N}_1 R)r$ “pequeno” e, concomitantemente, tornar os termos em w , d e v da equação (1) também “pequenos”. Além disso, tendo em vista que estes últimos dependem apenas de K e que $(I - \tilde{N}_1 R)$ depende só de R , pode-se tratar separadamente os objetivos de “rastreamento de r por y ” (i.e., tornar $(I - \tilde{N}_1 R)r$ “pequeno” e de “atenuação das perturbações w , d e v ” (i.e., tornar “pequenos” os termos correspondentes na equação acima).

No sentido de definir funcionais cuja otimização reflita estes objetivos é necessário caracterizar as classes de funções correspondentes à evolução no tempo das variáveis r , u , d e w que serão consideradas. É usual atribuir-se um grau de imprevisibilidade à evolução ao longo do tempo destas variáveis (principalmente no que se refere às variáveis de perturbação), o que leva à adoção de caracterizações estocásticas para as mesmas (ver, por exemplo,

Kwakernaak & Sivan, 1971). Nesta linha, uma abordagem comumente adotada consiste em caracterizar matematicamente a evolução destas variáveis através dos chamados processos estocásticos estacionários em sentido amplo (ver, Kwakernaak & Sivan, 1971), Youla, Bongiorno & Jabr (1976a,b), (Kucera & Sebek, 1985), (Youla & Bongiorno, 1985), (Park & Bongiorno, 1989). Para evitar a necessidade de se introduzir definições e apresentar fatos básicos sobre processos estocásticos (que fugiriam ao escopo destas notas), ao invés de apresentar estas formulações, vai-se introduzir uma outra “classe de sinais” para as quais os objetivos básicos a serem atingidos através da escolha de C levam a problemas de otimização idênticos àqueles mencionados acima.

Neste sentido considere-se o conjunto

$$S_\alpha = \{\xi \in S^\ell : \xi = \phi_\alpha \bar{\xi} \text{ para algum } \bar{\xi} \in S^\ell \text{ tal que } \|\bar{\xi}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\bar{\xi}(j\omega)\|_2 \leq 1\}.$$

onde

$$\phi_\alpha \in M(S) \text{ é tal que } \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\phi_\alpha^*(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)]d\omega < \infty.$$

Note-se que, para qualquer $\xi \in S_\alpha$, $\|\xi(j\omega)\|_2 \leq \|\phi_\alpha(j\omega)\| \|\bar{\xi}(j\omega)\|_2 \leq \|\phi_\alpha(j\omega)\|$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, i.e., ξ tem “magnitude” limitada em cada $j\omega$ por $\|\phi_\alpha(j\omega)\|$.

Se $y_\alpha = M_\alpha \xi$ para algum $\xi \in S_\alpha$, onde $M_\alpha \in M(S)$ então

$$\|y_\alpha\|_2^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y_\alpha^*(j\omega)y_\alpha(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \|y_\alpha(j\omega)\|_2^2 d\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\|y_\alpha\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|M_\alpha(j\omega)\xi(j\omega)\|_2^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \|M_\alpha(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)\bar{\xi}(j\omega)\|_2^2 d\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\|y_\alpha\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|M_\alpha(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)\|_2^2 \|\bar{\xi}(j\omega)\|_2^2 d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|M_\alpha(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)\|_2^2 d\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\|y_\alpha\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{[M_\alpha(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)]^*[M_\alpha(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)]\}d\omega = \|M_\alpha\phi_\alpha\|_F^2 \leq \|M_\alpha\|_\infty^2 \|\phi_\alpha\|_F^2$$

$$\text{onde } \|\phi_\alpha\|_F^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\phi_\alpha^*(j\omega)\phi_\alpha(j\omega)]d\omega$$

Portanto, y_α é de “quadrado integrável” e um limite superior sobre $\|y_\alpha\|_2$ é dado por $\|y_\alpha\|_2 \leq \|M_\alpha \phi_\alpha\|_F$.

Retornando à equação (1), ao se admitir que $r \in S_r$, $w \in S_w$, $d \in S_d$ e $v \in S_v$ (S_α , $\alpha = r, w, d$ e v , definido acima) pode-se então considerar que os objetivos básicos para a escolha de C (ou de (R, K)) correspondem à minimização dos termos

$$\|(I - M_r)\phi_r\|_F^2, \|M_\alpha \phi_\alpha\|_F^2, \alpha = w, d \text{ e } v \text{ onde}$$

$$M_r = \tilde{N}_1 R, \quad M_w = \tilde{N}_1(K\tilde{N}_2 + Y_0), \quad M_d = \tilde{N}_1 K \tilde{N}_4 + H_0, \quad M_v = \tilde{N}_1(K\tilde{D}_2 - X_0)$$

Assim, no caso de se considerar apenas um sinal de perturbação, por exemplo v , uma formulação natural para a escolha de C seria determinar R e K a partir dos problemas de otimização

$$\min_{R \in M(S)} \|(I - \tilde{N}_1 R)\phi_r\|_F^2 \quad \text{e} \quad \min_{K \in M(S)} \|\tilde{N}_1(K\tilde{D}_2 - X_0)\phi_v\|_F^2$$

Para o caso de se desejar também levar em conta os termos relativos a w e/ou d poder-se-ia tomar, para a escolha de K , o problema

$$\min_{K \in M(S)} \|M_v \phi_v\|_F^2 + \rho_d \|M_d \phi_d\|_F^2 + \rho_w \|M_w \phi_w\|_F^2$$

onde os coeficientes reais, não-negativos $\{\rho_\alpha\}$ permitiriam dar maior ou menor ênfase aos vários sinais em questão. Há, contudo, um outro aspecto relevante (mesmo no caso em que se considera apenas um termo $\|M_\alpha \phi_\alpha\|_F^2$) que diz respeito ao fato de ser frequentemente indesejável que a ação do controlador acarrete “valores grandes” para a variável u (por razões de segurança, conservação de equipamento, consumo de energia, etc). Por isso é conveniente considerar os efeitos de r , w , d e v sobre u que, pelo Teorema 1, são dados por

$$u = \tilde{M}_r r + \tilde{M}_w w + \tilde{M}_d d + \tilde{M}_v v,$$

e definir para cada sinal um funcional correspondente, qual seja,

$$J_\alpha(K) = \|M_\alpha \phi_\alpha\|_F^2 + \rho_\alpha^u \|\tilde{M}_\alpha \phi_\alpha\|_F^2, \quad \alpha = d, v, w$$

$$J_1(R) = \|(I - M_r)\phi_r\|_F^2 + \rho_r^u \|\tilde{M}_r \phi_r\|_F^2$$

onde $\tilde{M}_r = D_2 R$, $\tilde{M}_w = D_2(K\tilde{N}_2 + Y_0)$, $\tilde{M}_d = D_2 K\tilde{N}_4 + H_1\tilde{N}_4$, $\tilde{M}_v = D_2(K\tilde{D}_2 - X_0)$ e os coeficientes reais positivos $\{\rho_\alpha^u\}$ permitem penalizar a "magnitude" da variável u . Pode-se então definir

$$J_2(K) = J_v(K) + \rho_d J_d(K) + \rho_w J_w(K) \quad , \quad \rho_\alpha \geq 0$$

e escolher R e K a partir dos problemas de otimização

$$\min_{R \in M(S)} J_1(R) \quad \text{e} \quad \min_{K \in M(S)} J_2(K) \quad (3)$$

No sentido de analisar estes problemas de otimização é conveniente reescrever J_i na forma de um único termo quadrático mais um termo linear (em R para $i = 1$ e em K para $i = 2$). Para este fim note-se que $J_1(R)$ e cada $J_\alpha(K)$ podem ser escritos na forma

$$J_\alpha(X) = \|\tilde{N}_1 X M_\alpha^r + F_\alpha\|_F^2 + \rho_\alpha^u \|D_2 X M_\alpha^r + \tilde{F}_\alpha\|_F^2 \quad (4)$$

onde $\alpha = r, d, v$ e w , X substitui R (quando $\alpha = r$) ou K ($\alpha = d, v$ e w)

$$\begin{aligned} M_w^r &= \tilde{N}_2 \phi_w \quad , \quad M_d^r = \tilde{N}_4 \phi_d \quad , \quad M_v^r = \tilde{D}_2 \phi_v \quad , \quad M_r^r = \phi_r \\ F_w &= \tilde{N}_1 Y_0 \phi_w \quad , \quad F_d = H_0 \phi_d \quad , \quad F_v = -\tilde{N}_1 X_0 \phi_v \quad , \quad F_r = -\phi_r \\ \tilde{F}_w &= D_2 Y_0 \phi_w \quad , \quad \tilde{F}_\alpha = H_1 \tilde{N}_4 \phi_d \quad , \quad \tilde{F}_v = -D_2 X_0 \phi_v \quad , \quad \tilde{F}_r = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Por outro lado, para $\tilde{M}_\ell \in M(S)$, $X \in M(S)$, $\tilde{M}_r \in M(S)$, $\tilde{F} \in M(S)$ tais que $\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\tilde{F}(j\omega)^* \tilde{F}(j\omega)] d\omega < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{[\tilde{M}_\ell K \tilde{M}_r(j\omega)]^* [\tilde{M}_\ell K \tilde{M}_r(j\omega)]\} d\omega < \infty$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_\ell K \tilde{M}_r + \tilde{F}\|_F^2 &= \|\tilde{F}\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\tilde{F}(j\omega)^* \tilde{M}_\ell(j\omega) K(j\omega) \tilde{M}_r(j\omega)] d\omega \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{[\tilde{M}_\ell X \tilde{M}_r(j\omega)]^* [\tilde{M}_\ell X \tilde{M}_r(j\omega)]\} d\omega \end{aligned}$$

(onde foi usado, em particular, o fato das funções em questão serem real-rationais). ou seja,

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_\ell X \tilde{M}_r + \tilde{F}\|_F^2 &= \|\tilde{F}\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\tilde{F}(j\omega)^* \tilde{M}_\ell(j\omega) X(j\omega) \tilde{M}_r(j\omega)] d\omega \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\tilde{M}_\ell(j\omega)^* \tilde{M}_\ell(j\omega) X(j\omega) \tilde{M}_r(j\omega) \tilde{M}_r(j\omega)^* X(j\omega)^*] d\omega \end{aligned}$$

Portanto, admitindo-se que para $\alpha = w, d, v$ tem-se $\rho_\alpha^u = \rho^u$

$$\begin{aligned} J_\alpha(K) &= (\|F_\alpha\|_F^2 + \rho^u \|\tilde{F}_\alpha\|_F^2) \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{[F_\alpha(j\omega)^* \tilde{N}_1(j\omega) + \rho^u \tilde{F}_\alpha(j\omega)^* D_2(j\omega)]K(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)\}d\omega \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\Theta(j\omega)K(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)^*K(j\omega)^*]d\omega \end{aligned}$$

onde $\Theta(j\omega) = \tilde{N}_1(j\omega)^* \tilde{N}_1(j\omega) + \rho^u D_2(j\omega)^* D_2(j\omega)$, ou definindo Θ em \mathcal{C} ,

$$\Theta \triangleq \tilde{N}_1 \sim \tilde{N}_1 + \rho^u D_2 \sim D_2 \quad , \quad \text{e para } G \in M(R_p) \quad G^\sim(s) \triangleq G(-s)^T \quad (6)$$

(note que $G^\sim(j\omega) = G(-j\omega)^T = [G(j\omega)^c]^T = G(j\omega)^*$ pois G é real-racional.)

Tendo em vista que

$$\text{tr}[\Theta(j\omega)K(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)^*K(j\omega)^*] = \text{tr}[K(j\omega)^*\Theta(j\omega)K(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)M_\alpha^r(j\omega)^*]$$

pode-se então escrever

$$\begin{aligned} J_2(K) &= \sum_{\alpha=w,d,v} (\|F_\alpha\|_F^2 + \rho^u \|\tilde{F}_\alpha\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{[\sum_{\alpha} \rho_\alpha \Xi_\alpha(j\omega)]^* K(j\omega)\}d\omega \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[K(j\omega)^*\Theta(j\omega)K(j\omega)\Phi(j\omega)]d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$\Phi = \sum_{\alpha=w,d,v} \rho_\alpha M_\alpha^r (M_\alpha^r)^\sim \quad , \quad \rho_v = 1 \quad , \quad \Xi_\alpha^\sim = M_\alpha^r \{F_\alpha^\sim \tilde{N}_1 + \rho^u (\tilde{F}_\alpha)^\sim D_2\} \quad (8)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} J_1(R) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{R(j\omega)^*\Theta_r(j\omega)R(j\omega)\Phi_r(j\omega)\}d\omega + \|F_r\|_F^2 \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\Xi_r(j\omega)^*R(j\omega)]d\omega \end{aligned} \quad (9)$$

onde $\Phi_r = \phi_r \phi_r^\sim$, $\Xi_r = -\Phi_r \tilde{N}_1$ e $\Theta_r \triangleq \tilde{N}_1 \sim N_1 + \rho_r^u D_2 \sim D_2$

É interessante observar que só foi possível escrever $J_1(R)$ e $J_2(K)$ com um único termo quadrático em R ou K porque $\{J_\alpha\}$, $\alpha = w, d, v$, dados por (4) são casos particulares da forma

$$\tilde{J}_\alpha(X) = \|M_\alpha^\ell X M_\alpha^r + F_\alpha\|_F^2 + \rho_\alpha^u \|\widetilde{M}_\alpha^\ell X \widetilde{M}_\alpha^r + \widetilde{F}_\alpha\|_F^2$$

onde $\rho_\alpha^u = \rho^u$, $\widetilde{M}_\alpha^r = M_\alpha^r$ e $M_\alpha^\ell = \check{N}_1$, $\widetilde{M}_\alpha^\ell = D_2$ - o que decorreu de se ter construído o critério quadrático a partir das duas primeiras linhas da matriz $T(R, K)$ sem omitir um dos elementos de cada coluna considerada. Em várias situações é necessário usar termos quadráticos que não satisfazem estas condições - por exemplo, para formular e resolver problemas de controle ótimo quadrático relevantes para o caso de conjuntos de sinais persistentes (ao invés de sinais de "quadrado integrável" como em S_α) é necessário introduzir funcionais quadráticos bem mais gerais (ver Corrêa et al., 1991; Silveira & Corrêa, 1992). Nestes casos, para se obter um critério com apenas um termo quadrático tem-se que lançar mão de produtos de Kronecker o que acarreta um aumento considerável das dimensões das matrizes em questão.

Mais concretamente, se $J(X) = \sum_{i=1}^I \|M_i^\ell X M_i^r + F_i\|_F^2$, pode-se escrever

$$J(X) = \sum_{i=1}^I \| [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T] \underline{X} + \underline{F}_i \|_2^2$$

onde para

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & \cdots & a_{\ell q} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix},$$

$$\underline{A} = [a_{11} \cdots a_{1q} \cdots a_{\ell 1} \cdots a_{\ell q}]^T \quad e \quad A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1}B & \cdots & a_{\ell q}B \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$J(X) = \sum_{i=1}^I \left\{ \|\underline{F}_i\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}_i(j\omega)^* [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T](j\omega) \underline{X}(j\omega) d\omega \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega)^* \left\{ [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T](j\omega) \right\}^* [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T](j\omega) \underline{X}(j\omega) d\omega \right.$$

ou seja,

$$J(X) = \sum_{i=1}^I \|F_i\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^I \underline{F}_i(j\omega)^* [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T](j\omega) \right\} \underline{X}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega)^* \Gamma(j\omega) \underline{X}(j\omega) d\omega \quad (10)$$

onde $\Gamma \triangleq \sum_{i=1}^I [M_i^\ell \otimes (M_i^\ell)^T] \sim [M_i^\ell \otimes (M_i^r)^T]$.

Os problemas quadráticos definidos acima são casos particulares do problema

$$\min_{\beta \in M(S)} J(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\beta(j\omega)^* \check{\Theta}(j\omega) \beta(j\omega) \check{\Phi}(j\omega)] d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\Xi(j\omega)^* \beta(j\omega)] d\omega \quad (11)$$

onde $\check{\Theta} \in M(R_p)$ e $\check{\Phi} \in M(R_p)$ são para-hermitianas (i.e., $G \in M(R_p)$ é para-hermitiana se $G^\sim = G$), definidas não-negativas em $j\mathbb{R}$ e tais que

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\check{\Theta}(j\omega)\| < \infty \quad , \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\check{\Phi}(j\omega)\| < \infty,$$

$$i_2[\check{\Phi}] \in M(R_p) \quad , \quad \text{onde para } F \in M(R_p) \quad i_2[F](s) \triangleq s^2 F(s),$$

$$\Xi \in M(R_p) \quad , \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\Xi(j\omega)\| < \infty \quad \text{e} \quad i_2[\Xi] \in M(R_p)$$

- note-se que sob estas condições $J(\beta)$ é definido para qualquer $\beta \in M(S)$ e que, introduzindo-se a notação $RL_\infty \triangleq \{f \in R_p : f \text{ não tem polos em } j\mathbb{R}\}$, $\check{\Theta}$, $\check{\Phi}$ e $\Xi \in M(RL_\infty)$.

Vai-se agora estudar o problema de otimização definido em (11). A grosso modo, a idéia básica é tentar convertê-lo em um problema do tipo

$$\min_{X \in M(S)} \|B - A_\ell X A_r\|_F^2$$

ou seja, em um problema de aproximação de um dado B por um elemento da imagem de $M(S)$ pela aplicação $X \mapsto A_\ell X A_r$. Neste sentido note-se inicialmente que, como

$$\check{\Theta}(s) \in M(RL_\infty) \text{ e } \check{\Phi}(s) \in M(RL_\infty)$$

são para-hermitianas, segue-se do Teorema da Fatoração Spectral (cf. Youla, 1961; Anderson & Moore, 1979) que existem $\phi \in M(S)$ e $\phi_\sigma \in M(S)$ tais que

$$\forall s \in \mathcal{C}_+ \quad , \quad \det[\phi(s)] \neq 0 \quad , \quad \det[\phi_\sigma(s)] \neq 0 \quad \text{e} \quad \check{\Phi} = \phi\phi^\sim \quad , \quad \check{\Theta} = \phi_\sigma^\sim\phi_\sigma$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t_r[\beta(j\omega)^*\check{\Theta}(j\omega)\beta(j\omega)\check{\Phi}(j\omega)] &= tr[\beta(j\omega)^*\phi_\sigma(j\omega)^*\phi_\sigma(j\omega)\beta(j\omega)\phi(j\omega)\phi(j\omega)^*] \\ &= tr\{[\phi(j\omega)^*\beta(j\omega)^*\phi_\sigma(j\omega)^*][\phi_\sigma(j\omega)\beta(j\omega)\phi(j\omega)]\} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$J(\beta) = \|\phi_\sigma\beta\phi\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} tr[\Xi(j\omega)^*\beta(j\omega)]d\omega \quad , \quad \text{ou ainda}$$

$$J(\beta) = \|\phi_\sigma\beta\phi\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} tr\{[\phi^{-1}(j\omega)\Xi(j\omega)^*\phi_\sigma^{-1}(j\omega)][\phi_\sigma(j\omega)\beta(j\omega)\phi(j\omega)]\}d\omega \quad (12)$$

Admitindo-se que $B \triangleq -(\phi_\sigma^{-1})^\sim\Xi(\phi^{-1})^\sim \in M(RL_2)$, onde

$$RL_2 = \{f \in R_p : f \text{ não tem polos em } j\mathbb{R} \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega)^*f(j\omega)d\omega < \infty\}$$

pode-se somar $\|B\|_F^2$ a $J(\beta)$, chegando-se, a partir de (12) a um problema de otimização equivalente ao definido em (11) qual seja

$$\min_{\beta \in M(S)} \|\|B - \phi_\sigma\beta\phi\|_F^2 \quad (13)$$

Antes de examinar o problema definido em (13) cabe aqui um comentário sobre a hipótese $B \in M(RL_2)$. Como $B \in M(R_p)$ esta hipótese é satisfeita se e somente se B não tem polos em $j\mathbb{R}$ e $i_1[B] \in M(R_p)$, onde $i_1[F](s) \triangleq sF(s)$. Ora, $i_1[B] = -i_1[(\phi_\sigma^{-1})^\sim\Xi(\phi^{-1})^\sim] = -(\phi_\sigma^{-1})^\sim i_2[\Xi]\{i_1[\phi]^{-1}\}^\sim$ e por hipótese $i_2[\Xi] \in M(R_p)$; portanto se ϕ_σ e $i_1[\phi]$ forem bipróprias, então $i_1[B] \in M(R_p)$ - note-se que a condição $i_1[\phi]$ biprópria é compatível com a hipótese inicial de " $i_2[\check{\Phi}] \in M(R_p)$ " já que esta é equivalente a " $i_1[\phi] \in M(R_p)$ "; note-se também que a condição " ϕ_σ biprópria" pode ser assegurada em termos dos dados do problema original, qual seja, $\min_{K \in M(S)} J_2(K)$, tomando-se D_2 biprópria e $\rho^u > 0$. Em relação à exigência de que B não tenha polos em $j\mathbb{R}$, note-se que, por hipótese, Ξ não os têm; portanto, se $\det[\phi_\sigma(j\omega)] \neq 0$ e $\det[\phi(j\omega)] \neq 0$, para

todo $\omega \in \mathbb{R}$, então B não tem polos em $j\mathbb{R}$ - em termos dos dados do problema original a condição “ $\det[\phi_\sigma(j\omega)] \neq 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$ ” é garantida para $\rho^u > 0$ sempre que $\det[\tilde{N}_1 \sim \tilde{N}_1]$ e $\det[D_2 \sim D_2]$ não possuírem zeros comuns em $j\mathbb{R}$; analogamente, a condição

$$\text{“det}[\phi(j\omega)] \neq 0, \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}\text{”}$$

é garantida para $\rho_\alpha > 0$, $\alpha = w, d, v$ sempre que $\{\det[M_\alpha^r(M_\alpha^r)^\sim]\}$, $\alpha = w, d, v$ não possuírem zeros comuns em $j\mathbb{R}$.

Vai-se agora analisar o problema de otimização definido em (13). Note-se, inicialmente, que, para todo $\beta \in M(S)$, $\phi_\sigma \beta \phi \in M(S)$ enquanto que $B \notin M(S)$. Por outro lado, tomando-se a expansão em frações parciais de cada elemento $(B)_{kl}$ de B e grupando os termos correspondentes a polos em $\{s \in \mathcal{C} : \text{Re}(s) > 0\}$ e em $\{s \in \mathcal{C} : \text{Re}(s) < 0\}$, conclui-se que $B \in M(RL_\infty)$ pode ser escrito na forma

$$B = B_+ + B_- \quad \text{onde} \quad B_+ \in M(S) \quad \text{e} \quad (B_-)^\sim \in M(S).$$

Além disso, como $i_1[B] \in M(R_p)$, pode-se tomar B_+ e B_- tais que $i_1[B_+] \in M(R_p)$ e $i_1[B_-] \in M(R_p)$. Pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \|B - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 &= \|(B_+ - \phi_\sigma \beta \phi) - B_-\|_F^2, \quad \text{ou seja,} \\ \|B - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 &= \|B_+ - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 + \|B_-\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[(B_-)^\sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)(j\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (14)$$

Note-se que $\text{tr}[(B_-)^\sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)] \in S$ (já que $(B_-)^\sim, B_+, \beta$ e $\phi \in M(S)$). Além disso, $i_2[\text{tr}\{(B_-)^\sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)\}] \in R_p$ (já que $i_1[B_+], i_1[B_-]$ e $i_1[\phi] \in M(R_p)$). Portanto, pelo Lema A.1 (ver apêndice desta seção)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[(B_-)^\sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)(j\omega)] d\omega = 0$$

Segue-se então de (14) que

$$\|B - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 = \|B_+ - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 + \|B_-\|_F^2$$

Conclui-se, portanto, que sob as hipóteses adicionais

$$(H.1) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \det[\phi_\sigma(j\omega)] \neq 0 \text{ e } \det[\phi(j\omega)] \neq 0$$

(H.2) ϕ_σ e $i_1[\phi]$ bипрóprias

os problemas de otimização

$$\min_{\beta \in M(S)} J(\beta) \text{ (definido em (11)) e } \min_{\beta \in M(S)} \|B_+ - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2$$

são equivalentes. Examinando-se este último, observa-se imediatamente que se

$$\phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1} \in M(S) \text{ então } B_{opt} \triangleq \phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1} \text{ é a única solução.}$$

Ora, $\phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1}$ não tem polos em \mathcal{C}_+ (pois B_+ não os tem e pelas hipóteses H.1 e H.2, $\phi_\sigma^{-1}, \phi^{-1}$ também não os têm). Além disso,

$$\phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1} = \phi_\sigma^{-1} i_1[B_+] \{i_1(\phi)\}^{-1} \in M(R_p).$$

Portanto $\phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1} \in M(S)$, e a única solução do problema $\min_{\beta \in M(S)} J(\beta)$ é

$$\beta_{opt} \triangleq \phi_\sigma^{-1} [-(\phi_\sigma^{-1}) \sim \Xi (\phi^{-1}) \sim]_+ \phi^{-1}$$

Estes resultados relativos ao problema de otimização definido em (11) são coletados em um Lema enunciado a seguir.

Lema 1: Sejam $\tilde{\Theta} \in M(RL_\infty)$, $\tilde{\Phi} \in M(RL_\infty)$ para-hermitianas e definidas não-negativas em $j\mathbb{R}$, e $\Xi \in M(RL_\infty)$ tais que

$$(H.0) \quad i_2[\tilde{\Phi}] \in M(R_p) \text{ e } i_2[\Xi] \in M(R_p)$$

$$(H.1) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad \det[\tilde{\Theta}(j\omega)] \neq 0 \text{ e } \det[\tilde{\Phi}(j\omega)] \neq 0$$

$$(H.2) \quad \tilde{\Theta} \text{ e } i_2[\tilde{\Phi}] \text{ são bипрóprias.}$$

Então, o problema de otimização

$$\min_{\beta \in M(S)} J(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\beta(j\omega)^* \tilde{\Theta}(j\omega) \beta(j\omega) \tilde{\Phi}(j\omega)] d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\Xi(j\omega)^* \beta(j\omega)] d\omega$$

tem uma única solução β_{opt} dada por $\beta_{opt} = \phi_\sigma^{-1} [-(\phi_\sigma^{-1}) \sim \Xi (\phi^{-1}) \sim]_+ \phi^{-1}$. ∇

Demonstração: A hipótese (H.0) garante que $J(\beta)$ é definido para todo $\beta \in M(S)$. Note-se a seguir, que como $\tilde{\Theta} \in M(RL_\infty)$ e $\tilde{\Phi} \in M(RL_\infty)$ são para-hermitianas, segue-se do

Teorema da Fatoração Spectral (Anderson & Moore, 1979) que existem $\phi_\sigma \in M(S)$ e $\phi \in M(S)$ tais que $\phi_\sigma \sim \phi_\sigma = \Theta$, $\phi \phi \sim = \check{\Phi}$ e

$$\forall s \in \mathcal{C}_+ , \det [\phi_\sigma(s)] \neq 0 \quad \text{e} \quad \det [\phi(s)] \neq 0 \quad (15)$$

Além disso, pela hipótese (H.1), a condição (15) é válida também no eixo $j\mathbb{R}$. i.e.,

$$\forall s \in \mathcal{C}_+^c , \det [\phi_\sigma(s)] \neq 0 \quad \text{e} \quad \det [\phi(s)] \neq 0 \quad (16)$$

Segue-se então de (16) e da hipótese (H.2) que $\phi_\sigma^{-1} \in M(S)$ e que, para $\nu \in \mathbb{R}_+$, $(\bar{\phi}_\nu)^{-1} \in M(S)$, onde $\bar{\phi}_\nu(s) \triangleq (s + \nu)\phi(s)$.

Por outro lado, para $\mu \in \mathbb{R}$, tem-se que $\Xi_\mu \in M(RL_2)$, onde $\bar{\Xi}_\mu(s) \triangleq (s + \mu)\Xi(s)$ (já que $i_2[\Xi] \in M(R_p)$ e $\Xi \in M(RL_\infty)$). Portanto,

$$B = -(\phi_\sigma^{-1}) \sim \Xi (\phi^{-1}) \sim = -(\phi_\sigma^{-1}) \sim [-\bar{\Xi}_{(-\nu)}] (\bar{\phi}_\nu^{-1}) \sim \in M(RL_2).$$

Assim

$$J(\beta) = \|\phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{[(\phi^{-1} \Xi \phi_\sigma^{-1})(\phi_\sigma \beta \phi)](j\omega)\} d\omega \text{ e}$$

$$J(\beta) + \|B\|_F^2 = \|B - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 \quad (17)$$

Escrevendo-se $B = B_+ + B_-$ onde $B_+ \in M(S)$, $(B_-) \sim \in M(S)$, $B_+ \in M(RL_2)$, $B_- \in M(RL_2)$, segue-se de (17) que

$$J(\beta) + \|B\|_F^2 = \|B_+ - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 + \|B_-\|_F^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[(B_-) \sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)](j\omega) d\omega \quad (18)$$

Mas, pelo Lema A.1, $\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[(B_-) \sim (B_+ - \phi_\sigma \beta \phi)](j\omega) d\omega = 0$ e, portanto,

$$J(\beta) + \|B\|_F^2 - \|B_-\|_F^2 = \|B_+ - \phi_\sigma \beta \phi\|_F^2 \quad (19)$$

Note-se que $\beta_{opt} = \phi_\sigma^{-1} B_+ \phi^{-1} = \phi_\sigma^{-1} \bar{B}_{+\nu} (\bar{\phi}_\nu)^{-1} \in M(S)$, onde $\nu \in \mathbb{R}_+$ e

$$\bar{B}_{+\nu}(s) = (s + \nu)B_+(s) \text{ - (já que } B_+ \in M(S), \phi_\sigma^{-1} \in M(S) \text{ e } (\bar{\phi}_\nu)^{-1} \in M(S)).$$

Portanto, para todo $\beta \in M(S)$,

$$J(\beta) = \|B_-\|_F^2 - \|B\|_F^2 + \|B_+ - \phi_\sigma \beta_{opt} \phi + \phi_\sigma(\beta_{opt} - \beta)\phi\|_F^2 \Leftrightarrow$$

$$J(\beta) = \|B_-\|_F^2 - \|B\|_F^2 + \|\phi_\sigma(\beta_{opt} - \beta)\phi\|_F^2 \Leftrightarrow$$

$$J(\beta) - J(\beta_{opt}) = \|\phi_\sigma(\beta_{opt} - \beta)\phi\|_F^2 \geq 0$$

onde a igualdade se verifica se e somente se $\beta = \beta_{opt}$ □

Comentários: (i) Há uma simetria entre $\check{\Theta}$ e $\check{\Phi}$ que, por simplicidade, não foi explorada no enunciado do Lema 1; na realidade o Lema 1 continua válido se $\check{\Theta}$ e $\check{\Phi}$ forem permutados nas hipóteses (H.0), (H.1) e (H.2).

(ii) A hipótese (H.0) (ou a hipótese correspondente com a substituição de $\check{\Phi}$ por $\check{\Theta}$) é necessária para assegurar que $J(\beta)$ seja definido para todo $\beta \in M(S)$.

Aplicando-se o Lema 1 aos problemas de otimização $\min_{K \in M(S)} J_2(K)$ e $\min_{R \in M(S)} J_1(R)$ chega-se ao controlador estabilizante que atinge os objetivos básicos de controle (no sentido da minimização dos funcionais J_1 e J_2) para as classes de sinais $\{S_\alpha\}$, $\alpha = r, d, v, w$. Este é o conteúdo do teorema enunciado a seguir.

Teorema 1: Considere-se o diagrama de blocos da Figura 2.1 onde o bloco \mathcal{P} é descrito por $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix} \in M(R_p)$ estabilizável e os sinais r, d, v e w pertencem, respectivamente, aos conjuntos

$$S_\alpha = \{\xi \in S^{\ell_\alpha} : \xi = \phi_\alpha \bar{\xi} \text{ para algum } \bar{\xi} \in S^{\ell_\alpha} \text{ tal que } \|\bar{\xi}\|_\infty \leq 1\}, \alpha = r, d, v, w$$

onde $\phi_\alpha \in M(S) \cap M(RL_2)$. Tomem-se fatorações coprimas $P_i = N_i D_i^{-1}$, $i = 1, 2$,

$$P_2 = \tilde{D}_2^{-1} \tilde{N}_2 \text{ com } D_1, D_2 \text{ e } \tilde{D}_2 \text{ bipróprias.}$$

Suponha-se que

- (i) Para todo $\omega \in \mathbb{R}$, $\det[M_{12}(j\omega)] \neq 0$, onde $D_2 = D_1 M_{12}$ (a existência de $M_{12} \in S$ decorre da estabilizabilidade de P)
- (ii) $i_1[\phi_r]$ e $i\phi_1[\phi_v]$ são bipróprias
- (iii) $\det[\phi_r]$, $\det[\phi_v]$ e $\det[\phi_w]$ não tem zeros em $j\mathbb{R}$. Se K_{opt} (definido abaixo) é tal que $[K_{opt}(\infty)\tilde{N}_2(\infty) + Y_0(\infty)]$ é não-singular, então o controlador estabilizante que minimiza (simultaneamente)

$$\tilde{J}_1(C) = \|[I - F_{yr}(C)]\phi_r\|_F^2 + \rho_r^u \|F_{ur}(C)\phi_r\|_F^2 \quad e$$

$$\tilde{J}_2(C) = \|F_{yv}(C)\phi_v\|_F^2 + \rho^u \|F_{uv}(C)\phi_v\|_F^2 +$$

$$\sum_{\alpha=d,w} \rho_\alpha \{ \|F_{y\alpha}(C)\phi_\alpha\|_F^2 + \rho^u \|F_{u\alpha}(C)\phi_\alpha\|_F^2 \}$$

para $\rho_r^u > 0, \rho^u > 0, \rho_w > 0$ e $\rho_d \geq 0$, é dado por

$$C = (K_{opt}\tilde{N}_2 + Y_0)^{-1}[R_{opt} : (K_{opt}\tilde{D}_2 - X_0)], \text{ onde}$$

$$R_{opt} \triangleq \phi_{\theta r}^{-1} [-(\phi_{\theta r}^{-1}) \sim \Xi_r (\phi_r^{-1}) \sim]_+ \phi_r^{-1}, \quad K_{opt} \triangleq \phi_\theta^{-1} [-(\phi_\theta^{-1}) \sim \Xi (\phi^{-1}) \sim]_+ \phi^{-1},$$

$\Xi = \sum_\alpha \rho_\alpha \Xi_\alpha$, Ξ_r , Θ_r , Θ , Φ e Φ_r são definidos pelas equações (6), (8) e (9), $\phi_{\theta r}$, ϕ_θ , ϕ_r e $\phi \in M(S)$ são fatores espectrais, a saber $\Theta_r = \phi_{\theta r} \sim \phi_{\theta r}$, $\Theta = \phi_\theta \sim \phi_\theta$, $\Phi_r = \phi_r \phi_r \sim$, $\Phi = \phi \phi \sim$, cujos determinantes não tem zeros em \mathcal{C}_+ e $X_0 N_2 + Y_0 D_2 = \bar{I}$ ∇

Demonstração: Pelo Teorema 2.1 o conjunto de todos os controladores estabilizantes é dado por

$$\{ C(R, K) = (K\tilde{N}_2 + Y_0)^{-1}[R : (K\tilde{D}_2 - X_0)] : R \in M(S), K \in M(S) \text{ tal que} \\ [K\tilde{N}_2 + Y_0](\infty) \text{ é não-singular} \}$$

Note-se que $\tilde{J}_1[C(R, K)] = J_1(R)$ e $\tilde{J}_2[C(R, K)] = J_2(K)$ onde J_1 e J_2 são definidos em (11) e (12), portanto a demonstração será concluída aplicando-se o Lema 1 aos problemas $\min_{R \in M(S)} J_1(R)$ e $\min_{K \in M(S)} J_2(K)$. Para tanto, vai-se agora demonstrar que as hipóteses (H.0), (H.1) e (H.2) são satisfeitas por estes problemas.

Considere-se primeiro o problema em R . Como $\Phi_r = \phi_r \phi_r \sim$ e $\Xi_r = -\tilde{N}_1 \sim o_r \phi_r \sim$ segue-se de $\phi_r \in M(RL_2)$ e $\tilde{N}_1 \in M(S)$ que $i_2[\Phi_r] \in M(R_p)$ e $i_2[\Xi_r] \in M(R_p)$.

Como $i_1(\phi_r)$ é biprópria (devido a hipótese (ii) do enunciado do teorema) $i_2[\Phi_r]$ é biprópria. Além disso, $\Theta_r = \tilde{N}_1 \sim \tilde{N}_1 + \rho_r^u D_2 \sim D_2 = M_{12} \sim [N_1 \sim N_1 + \rho_r^u (D_1 \sim D_1)] M_{12}$ e portanto, segue-se de (i), do fato de N_1 e D_1 serem c.o.d., de $\rho_r^u > 0$ e de D_1 e D_2 serem bipróprias que Θ_r também é biprópria e $\det[\Theta_r]$ não tem zeros em $j\mathcal{R}$. Finalmente, segue-se de (iii) que $\det[\Phi_r]$ também não tem zeros em $j\mathcal{R}$. Portanto, o Lema 1 se aplica ao problema $\min_{R \in M(S)} J_1(R)$ cuja única solução é R_{opt} .

Considere-se agora o problema em K . Como

$$\Theta = \tilde{N}_1 \sim \tilde{N}_1 + \rho^u D_2 \sim D_2 = M_{12} \sim (N_1 \sim N_1 + \rho^u (D_1 \sim D_1))$$

$$\Phi = (\tilde{D}_2 \phi_v)(\tilde{D}_2 \phi_v) \sim + \rho_d (\tilde{N}_4 \phi_d)(\tilde{N}_4 \phi_d) \sim + \rho_w (\tilde{N}_2 \phi_w)(\tilde{N}_2 \phi_w) \sim$$

$$\Xi \sim = (\tilde{D}_2 \phi_v)[F_v \sim \tilde{N}_1 + \rho^u (\tilde{F}_v) \sim D_2] + \rho_d (\tilde{N}_4 \phi_d)[F_d \sim \tilde{N}_1 + \rho^u (\tilde{F}_d) \sim D_2] +$$

$$\rho_w (\tilde{N}_2 \phi_w)[F_w \sim \tilde{N}_1 + \rho^u (F_w^u) \sim D_2]$$

segue-se de $\phi_\alpha \in M(RL_2)$, $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_4, D_2, \tilde{D}_2 \in M(S)$, que $i_2[\Phi] \in M(R_p)$ e

$i_2[\Xi] \in M(R_p)$.

Além disso, segue-se de (i), do fato de N_1 e D_1 serem c.o.d. e de D_1 e D_2 serem bipróprias que, para $\rho^u > 0$, Θ é biprópria e $\det[\Theta]$ não tem zeros em $j\mathcal{R}$. Examina-se agora a possibilidade de que $\det[\Phi]$ tenha zeros em $j\mathcal{R}$. Neste sentido, admita-se que $\exists \omega_0 \in \mathcal{R}$ tal que $\det[\Phi(j\omega_0)] = 0 \Leftrightarrow$ (já que Φ é para-hermitiana)

$\exists v \in \mathcal{C}^l$, $v \neq 0$ tal que $v^* \Phi(j\omega_0)v = 0 \Leftrightarrow$

$$v^* [\tilde{D}_2(j\omega_0) \phi_v(j\omega_0)] = 0, \rho_d v^* [\tilde{N}_4(j\omega_0) \phi_d(j\omega_0)] = 0, \rho_w v^* [\tilde{N}_2(j\omega_0) \phi_w(j\omega_0)] = 0 \Rightarrow$$

(como $\rho_w > 0$)

$$v^* [\tilde{N}_2(j\omega_0) \quad \tilde{D}_2(j\omega_0)] \begin{bmatrix} \phi_w(j\omega_0) & 0 \\ 0 & \phi_v(j\omega_0) \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

Por outro lado, como \tilde{N}_2 e \tilde{D}_2 são c.o.e. (i.e., $\tilde{N}_2 \tilde{X} + \tilde{D}_2 \tilde{Y} = I$), para todo $v \in \mathcal{C}^l$,

$$v^* \neq 0 \Rightarrow v^* [\tilde{N}_2(s) \quad \tilde{D}_2(s)] \begin{bmatrix} \tilde{X}(s) \\ \tilde{Y}(s) \end{bmatrix} = v^* \neq 0, \text{ para todo } s \in \mathcal{C}_+^c;$$

Portanto, $v^* [\tilde{N}_2(j\omega_0) \tilde{D}_2(j\omega_0)] \neq 0$.

Segue-se então de (20) que existe $\tilde{v} = [\tilde{v}_1 \tilde{v}_2] \neq 0$ tal que

$$\tilde{v}_1^* \phi_w(j\omega_0) = 0 \text{ e } \tilde{v}_2^* \phi_v(j\omega_0) = 0.$$

Então $\det[\phi_v(j\omega_0)] = 0$ ou $\det[\phi_w(j\omega_0)] = 0$, o que contradiz a hipótese (ii). Portanto

$\det[\Phi]$ não tem zeros em $j\mathcal{R}$.

Resta demonstrar que $i_2[\Phi]$ é biprópria. Neste sentido note-se que

$$i_2[\Phi] = -\{(\tilde{D}_2 i_1[\phi_v])(\tilde{D}_2 i_1[\phi_v]) \sim + \rho_d (\tilde{N}_4 i_1[\phi_\alpha])(\tilde{N}_4 i_1[\phi_d]) \sim + \\ + \rho_w (\tilde{N}_2 i_1[\phi_w])(\tilde{N}_2 i_1[\phi_w]) \sim$$

Portanto $\det i_2[\phi](\infty) = 0 \Rightarrow \exists v \in \mathcal{Q}^e, v \neq 0$ tal que $v^* \tilde{D}_2(\infty) i_1[\phi_v](\infty) = 0$ o que contradiz o fato de \tilde{D}_2 e $i_1[\phi_v]$ serem bipróprias. Desta forma, o Lema 1 se aplica ao problema $\min_{K \in M(S)} J_2(K)$ cuja única solução é K_{opt} . \square

Comentários: (a) A hipótese (i) pode ser relaxada colocando-se mais termos nos funcionais J_1 e J_2 . Na realidade, adicionando-se a J_1 o termo $\rho_r^z \|N_2 R \phi_r\|_F^2$ e a J_2

$$\rho^z \{ \|N_2(K \tilde{D}_2 - X_0) \phi_v\|_F^2 + \rho_d \| (N_2 K \tilde{N}_4 + H_2 \tilde{N}_4) \phi_d \|_F^2 + \rho_w \| N_2(K \tilde{N}_2 + Y_0) \phi_w \|_F^2 \}$$

a existência e unicidade de solução dos novos problemas assim definidos são asseguradas sem a hipótese (i). E com as correspondentes modificações em Θ_r, Φ_r, Θ e Φ as expressões para as soluções ótimas R_{opt} e K_{opt} continuam válidas. A adição destes novos termos correspondentes a todo o último bloco-linha da matrix $T(R, K)$ mantém a estrutura específica que torna possível evitar o uso de produtos de Kronecker na caracterização das soluções ótimas em questão (ver comentário que se segue à equação (8)).

(b) As hipóteses (ii) e (iii) não são significativamente restritivas já que o papel das funções $\{\phi_\alpha\}$ é a de suprir limites superiores nas “magnitudes em cada frequência” dos sinais r, d, w e v .

(c) Note-se que, como é sempre possível escolher Y_0 biprópria, então para todo P tal que P_2 é estritamente próprio, i.e., $\lim_{s \rightarrow \infty} P_2(s) = 0$ (ou seja, onde a “ligação” entre u e z é dinâmica e não instantânea) a condição “ $K(\infty) \tilde{N}_2(\infty) + Y_0(\infty)$ não é singular” é satisfeita para todo $K \in M(S)$.

(d) Uma crítica freqüente à formulação de problemas de controle ótimo quadrático é a ausência de garantias *a priori* de que os controladores ótimos resultantes correspondam a sistemas de controle com margem de estabilidade satisfatórias (cf. Safonov et al. (1981), Doyle & Stein (1981), Zames (1981)). De fato, conforme a seção anterior, margens de estabilidade correspondem, em certos casos importantes, a limitações na norma ∞ de funções afins de K (e não a limitações em normas quadráticas) e a otimização destas margens de estabilidade é o tópico da próxima seção. Esta situação pode, contudo, ser mitigada adicionando-se ao critério L_2 outros termos quadráticos. Neste sentido, em (Youla et al., 1986) (Youla & Bongiorno, 1985) e (Park & Bongiorno, 1989) adicionam-se certos termos específicos cuja inclusão permite ainda caracterizar

as soluções ótimas sem lançar mão de produtos de Kronecker (o que acarretaria um aumento considerável nas dimensões das matrizes em questão); entretanto, para que se possa manipular efetivamente a margem de estabilidade no âmbito de controle ótimo quadrático, é conveniente considerar termos quadráticos mais gerais quando então torna-se necessário definir matrizes para-hermitianas via produtos de Kronecker (conforme discussão que se segue à equação (8)). Em um ou outro caso chega-se a problemas de otimização aos quais se pode aplicar o Lema 1.

Apêndice da seção 3

Lema A.1: Seja $f \in S$ tal que $i_2[f] \in R_p$. Então $\int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) d\omega = 0$ ▽

Demonstração: Considere-se o caminho $C_\rho, \rho > 0$

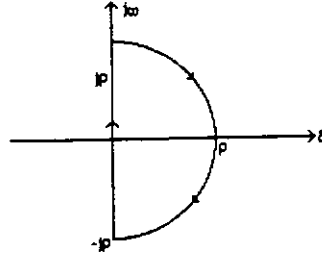


Figura 1

Pode-se então escrever

$$\int_{C_\rho} f(s) ds = \int_{-\rho}^{\rho} f(j\omega) d\omega + \int_{\tilde{C}_\rho} f(s) ds$$

onde $\tilde{C}_\rho = C_\rho - \{j\omega : \omega \in [-\rho, \rho]\}$. Como $f \in S, \forall \rho \in \mathbb{R}_+$, $\int_{\tilde{C}_\rho} f(s) ds = 0$.

Portanto,

$$\forall \rho \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \int_{-\rho}^{\rho} f(j\omega) d\omega = - \int_{\tilde{C}_\rho} f(s) ds \quad (A.1)$$

Vai-se agora demonstrar que $\int_{\tilde{C}_\rho} f(s) ds \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$. Neste sentido, note-se que como $f \in R_p$ e $i_2[f] \in R_p$, então $f(s) = \frac{\beta_0 s^k + \dots + \beta_k}{s^{k+q+\alpha} + s^{k+q-1} + \dots + \alpha_k s q + \dots + \alpha_{k+q}}$ para algum $q \geq 2$, $(\beta_0, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+q}) \in \mathbb{R}^{k+q}$. Portanto,

$$\left| \int_{\tilde{C}_\rho} f(s) ds \right| = \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f[g(\nu)] \rho e^{j\nu} j d\nu \right| \leq \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f[g(\nu)]| d\nu \quad (A.2)$$

onde $g : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathcal{C}, g(\nu) = \rho e^{j\nu}$.

Ora,

$$|f(s)| = \left| \sum_{\ell=0}^k \frac{\beta_\ell s^{k-\ell}}{s^{k+q} + \dots + \alpha_{k+q}} \right| \leq \sum_{\ell=0}^k \frac{|\beta_\ell| |s|^{k-\ell}}{|s^{k+q} + \dots + \alpha_{k+q}|} \quad (A.3)$$

Além disso,

$$|s^{k+q} + \alpha_1 s^{k+q-1} + \dots + \alpha_{k+q}| = |s^{k+q} - [-(\alpha_1 s^{k+q-1} + \dots + \alpha_{k+q})]|$$

e, então,

$$|s^{k+q} + \dots + \alpha_{k+q}| \geq |s^{k+q}| - |\alpha_1 s^{k+q-1} + \dots + \alpha_{k+q}|.$$

$$\forall s \text{ tal que } |s| > 1, |s^{k+q} + \dots + \alpha_{k+q}| \leq |s|^{k+q} - (k+q)\bar{\alpha}|s|^{k+q-1} \quad (\text{A.4})$$

onde $\bar{\alpha} \triangleq \max\{|\alpha_i| : i = 1, \dots, k+q\}$.

Segue-se de (A.3) e (A.4) que para todo s tal que $|s| > 1$,

$$|f(s)| \leq \sum_{\ell=0}^k \frac{|\beta_\ell| |s|^{k-\ell}}{|s|^{k+q} - (k+q)\bar{\alpha}|s|^{k+q-1}} = \frac{1}{|s|^q} \sum_{\ell=0}^k \frac{|\beta_\ell|}{|s|^\ell} \frac{|s|^k}{|s|^k - (k+q)\bar{\alpha}|s|^{k-1}}$$

ou seja $|f(s)| \leq \frac{\bar{\beta}}{1-(k+q)\bar{\alpha}|s|^{-1}} \frac{1}{|s|^q} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{|s|^\ell}$;

e como $|g(\nu)| = \rho$, $|f[g(\nu)]| \leq \frac{\bar{\beta}}{1-(k+q)\bar{\alpha}\rho^{-1}} \frac{1}{\rho^q} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\rho^\ell}$ para todo $\rho > 0$,

onde $\bar{\beta} = \max\{|\beta_\ell| : \ell = 0, \dots, k\}$

$$|f[g(\nu)]| \leq \frac{\bar{\beta}}{1-(k+q)\bar{\alpha}\rho^{-1}} \frac{1}{\rho^q} \frac{1}{1-\rho^{-1}} \quad (\text{A.5})$$

Segue-se, então, de (A.2) e (A.5) que para $\rho > 1$

$$\left| \int_{\tilde{c}_\rho} f(s) ds \right| \leq \frac{\bar{\beta}}{1-(k+q)\bar{\alpha}\rho^{-1}} \frac{1}{1-\rho^{-1}} \frac{\rho}{\rho^q} \pi$$

e como $q \geq 2$,

$$0 \leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \int_{\tilde{c}_\rho} f(s) ds \right| \leq \bar{\beta} \pi \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\rho^q} = 0;$$

portanto $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \int_{\tilde{c}_\rho} f(s) ds \right| = 0$. □

Comentário: Deste lema, segue-se, de forma imediata, a ortogonalidade dos subespaços RH_2 e RH_2^- de RL_2 , onde

$$RL_2 = \{f \in R_p : f \text{ não tem polos em } j\mathbb{R} \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega)^* f(j\omega) d\omega < \infty\}$$

$$RH_2 = \{f \in RL_2 : f \in S\}, \quad RH_2^- = \{f \in RL_2 : f^\sim \in S\}.$$

4. Margem de estabilidade e otimização em H_∞

Objetivos desta seção: Formular um problema de maximização de margem de estabilidade de um sistema de controle (P, C) , para um dado P , como um problema de otimização em H_∞ ; dar condições suficientes para a existência e unicidade de solução para este problema de otimização

Na seção 2, foi apresentada uma definição de margem de estabilidade relativa à famílias monoparamétricas de conjuntos de modelos. A partir desta definição enunciou-se um corolário (Corolário 2.2) do Teorema 2.2 que caracteriza a margem de estabilidade de um sistema de controle estável, (P_2^0, C) , relativa a perturbações estáveis não-estruturadas, i.e., à família $\{S_p(P_2^0, \alpha) : \alpha > 0\}$ onde

$$S_p(P_2^0, \alpha) \triangleq \{P_2 = P_2^0 + E : E \in M(S) \text{ e } \|W_l E W_r\|_\infty < \alpha\}$$

Por este corolário, a margem de estabilidade de (P_2^0, C) , onde

$$C = (K\tilde{N}_2 + Y_0)^{-1}[R : K\tilde{D}_2 - X_0], \quad R \in M(S), \quad K \in M(S),$$

relativa à $\{S_p(P_2^0, \alpha) : \alpha > 0\}$ é dada por $\|\tilde{Q}_2^0(K)\|_\infty^{-1}$ onde

$$\tilde{Q}_2^0(K) \triangleq \tilde{W}_l D_2^0(K\tilde{D}_2^0 - X_0)\tilde{W}_r.$$

Nesta seção vai-se estudar o problema da escolha do controlador estabilizante C que maximiza esta margem, ou equivalentemente, da escolha de $K \in M(S)$ que minimiza $\|\tilde{Q}_2^0(K)\|_\infty$. É importante ressaltar que este problema tanto pode ser um objetivo prioritário per si de projeto de um sistema de controle como prover elementos a partir dos quais seja possível combinar o aspecto da margem de estabilidade com os objetivos tratados na seção anterior (ver, por exemplo, Corrêa et al. 1991).

O problema estudado a seguir, qual seja, $\min_{K \in M(S)} \|\tilde{W}_l D_2^0(K\tilde{D}_2^0 - X_0)\tilde{W}_r\|_\infty$ e problema formalmente análogos foram tratados por Zames (1981), Zames & Francis (1983), Francis & Zames (1984), Francis, Helton & Zames (1984), Glover (1984), Safonov & Verma (1985), Glover (1986), Francis (1987), entre outros.

No sentido de simplificar a exposição que se segue apenas o caso de $P_2^0 \in R_p$ (e não $P_2^0 \in M(R_p)$) será considerado; quando então, o problema em questão se torna

$$\min_{K \in S} \|b_s + a_s K\|_\infty \quad (1)$$

onde $b_s \triangleq -W_s D_2^0 X_0$, $a_s = W_s D_2^0 D_2^0$, $W_s = \bar{W}_\ell \bar{W}_r$, $b_s \in S$, $a_s \in S$.

Note-se inicialmente que o problema em (1) é o de aproximar um dado $b_s \in S$ por um elemento da imagem de S pela aplicação $K \mapsto a_s K$. É claro que se esta aplicação é sobrejetora (se e somente se $a_s^{-1} \in S$) então $K_0 = -a_s^{-1} b_s$ é solução ótima. Ora, por hipótese W_s é biprópria; e D_2^0 pode ser tomada biprópria. Assim, este problema só é não-trivial quando a_s tem zeros em \mathcal{C}_+ , ou seja, quando $P_2^0 \notin S$. Neste caso $(D_2^0)^{-1} \notin S$ e $K_0 = -a_s^{-1} b_s = X_0 (D_2^0)^{-1} \notin S$, não sendo, portanto solução.

A idéia básica da abordagem deste problema aqui apresentada é converter o problema de aproximação de $b_s \in S$ em $\{a_s K : K \in S\}$ em um problema de aproximação de $f \in R_p (f \notin S)$ em S - observe-se que, utilizando expansão em frações parciais, pode-se "projetar" f em S e em $(R_p - S)$, de modo que, ao fazer esta conversão, torna-se evidente que o cerne deste problema diz respeito à parte instável de f assim obtida.

Tome-se, então, uma fatoração de a_s que "separe os zeros em \mathcal{C}_+ dos outros zeros", i.e., $a_s = a_{in} a_\theta$, onde $a_{in} \in S$, $a_\theta \in S$ são tais que, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, $|a_{in}(j\omega)| = 1$ e, para todo $s \in \mathcal{C}_+$, $a_\theta(s) \neq 0$ - isto é sempre possível pois se $a_s = \frac{n_- n_+}{d}$ onde os polinômios de coeficientes reais n_- , n_+ e d são tais que n_+ e d não tem raízes em \mathcal{C}_+ e n_- não tem raízes em $\mathcal{C}_- \cup \{j\mathbb{R}\}$, então pode-se tomar $a_{in} = \frac{n_-}{(n_-)^{\sim}}$, $a_\theta = \frac{(n_-)^{\sim} n_+}{d}$.

Tem-se então

$$\|b_s + a_s K\|_\infty = \|b_s + a_{in} a_\theta K\|_\infty = \|a_{in} (a_{in}^{-1} b_s + a_\theta K)\|_\infty, \Rightarrow$$

$$\|b_s + a_s K\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |a_{in}(j\omega)| \|[a_{in}^{-1} b_s + a_\theta K](j\omega)\| = \|a_{in}^{-1} b_s + a_\theta K\|_{L_\infty}$$

(pois $|a_{in}(j\omega)| = 1$), onde $\|g\|_{L_\infty} \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |g(j\omega)|$.

Escrevendo $a_{in}^{-1} b_s = b_+ + b_-$ onde $b_+ \in S$ e b_- é tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} b_-(s) = 0$ e $(b_-)^{\sim} \in S$, tem-se

$$\|b_s + a_s K\|_\infty = \|b_- + (b_+ + a_\theta K)\|_{L_\infty} \quad (2)$$

Suponha que a_s não tem zeros em $j\mathcal{R}$. Como, por construção, $a_\theta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathcal{C}_+$ e a_s é biprópria, então $a_\theta^{-1} \in S$; tomando-se então $K = \tilde{K}_0 + \Delta K$ onde $K_0 \triangleq -a_\theta^{-1}b_+ \in S$ e $\Delta K \in S$ tem-se

$$\|b_s + a_s K\|_\infty = \|b_- + a_\theta \Delta K\|_{L_\infty}$$

e como a aplicação $\Delta K \mapsto a_\theta \Delta K$ (definida em S) é bijetora o problema definido em (1) é equivalente ao problema

$$\min_{\hat{f} \in S} \|b_- - \hat{f}\|_{L_\infty} \quad (3)$$

conforme a proposição enunciada a seguir.

Proposição 1: Sejam $b_s \in S$ e $a_s \in S$ tal que a_s é biprópria e não tem zeros em $j\mathcal{R}$. Então, existe

$$K_{opt} \in S \quad \text{tal que} \quad \|b_s + a_s K_{opt}\|_\infty \leq \|b_s + a_s K\|_\infty \quad \text{para todo} \quad K \in S$$

se e somente se, existe

$$\hat{f}_{opt} \in S \quad \text{tal que} \quad \|b_- - \hat{f}_{opt}\|_{L_\infty} \leq \|b_- - \hat{f}\|_{L_\infty} \quad \text{para todo} \quad \hat{f} \in S,$$

onde $(b_-)^{\sim} \subset RH_2$, $b_+ \in S$ e $b_- + b_+ = a_{in}^{-1}b_s$.

Além disso, dada uma solução \hat{f}_{opt} do problema (3), $K_{opt} = -a_\theta^{-1}(\hat{f}_{opt} + b_+)$ é solução do problema (1). ∇

Demonstração: Suponha que exista $K_{opt} \in S$ solução ótima do problema (1). Então, devido a (2),

$$\begin{aligned} \|b_s + a_s K_{opt}\|_\infty &= \|b_- + (b_+ + a_\theta K_{opt})\|_{L_\infty} = \|b_- + a_\theta \Delta_{opt}\|_{L_\infty} \\ &\leq \|b_s + a_s K\|_\infty = \|b_- + (b_+ + a_\theta K)\|_{L_\infty}, \quad \forall K \in S \end{aligned}$$

onde $\Delta_{opt} = a_\theta^{-1}b_+ + K_{opt}$. Como $a_\theta^{-1} \in S$, a aplicação de S em S

“ $K \mapsto b_+ + a_\theta K$ ” é sobrejetora e, portanto, segue-se da desigualdade acima que

$\|b_- + a_\theta \Delta_{opt}\|_{L_\infty} \leq \|b_- - \hat{f}\|_{L_\infty}$ para todo $\hat{f} \in S$. Definindo-se $\hat{f}_{opt} = -a_\theta \Delta_{opt}$, tem-se, então,

$$\|b_- - \hat{f}_{opt}\|_{L_\infty} \leq \|b_- - \hat{f}\|_{L_\infty} \quad \forall \hat{f} \in S.$$

Suponha agora que exista $\hat{f}_{opt} \in S$ solução ótima do problema (2). Então

$$\begin{aligned} \|b_- - \hat{f}_{opt}\|_{L_\infty} &= \|(b_- + b_+) - (\hat{f}_{opt} + b_+)\|_{L_\infty} = \|a_{in}^{-1} b_s - (\hat{f}_{opt} + b_+)\|_{L_\infty} \\ &\leq \|b_- - f\|_{L_\infty} = \|a_{in}^{-1} b_s - (f + b_+)\|_{L_\infty} \end{aligned}$$

para todo $f \in S$. Portanto, como a aplicação de S em S " $f \mapsto f + b_+$ " é sobrejetora,

$$\|a_{in}^{-1} b_s - (\hat{f}_{opt} + b_+)\|_{L_\infty} \leq \|a_{in}^{-1} b_s + x\|_{L_\infty}, \quad \forall x \in S$$

ou ainda, como a aplicação de S em S " $\tilde{x} \mapsto a_\theta \tilde{x}$ " é também sobrejetora,

$$\|a_{in}^{-1} b_s - a_\theta a_\theta^{-1} (\hat{f}_{opt} + b_+)\|_{L_\infty} \leq \|a_{in}^{-1} b_s + a_\theta K\|_{L_\infty}, \quad \forall K \in S$$

Ora, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $|a_{in}(j\omega)| = 1$. Portanto, segue-se da última desigualdade que

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |a_{in}^{-1}(j\omega)| |b_s(j\omega) + a_s(j\omega) K_{opt}(j\omega)| \\ \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |a_{in}^{-1}(j\omega)| |b_s(j\omega) + a_s(j\omega) K(j\omega)| \quad \forall K \in S \end{aligned}$$

onde $K_{opt} = -a_\theta^{-1} (\hat{f}_{opt} + b_+)$, ou seja,

$$\|b_s + a_s K_{opt}\|_\infty \leq \|b_s + a_s K\|_\infty \quad \forall K \in S$$

já que a_s , K_{opt} e $b_s \in S$. □

Vai-se agora estudar o problema de otimização

$$\min_{\hat{f} \in S} \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty} \quad \text{onde } (f_0)^\sim \in S \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} f_0(s) = 0 \quad (4)$$

segundo a abordagem de Adamjan, Arov e Krein (1971), cujo passo inicial consiste em relacionar $\|f\|_{L_\infty}$ com a norma induzida de um operador definido por f . Inicialmente, é necessário introduzir a seguinte notação:

$$L_\infty = \{g(j\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C} : \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} |g(j\omega)| < \infty\}$$

$$L_2 = \{g(j\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C} : \text{para todo } T \in \mathbb{R}_+ \text{ existe a integral } \eta_T(g) = \int_{-T}^T |g(j\omega)|^2 d\omega \\ \text{e } \sup_{T \in \mathbb{R}_+} \eta_T(g) < \infty\}$$

(por simplicidade notacional vai-se escrever $g \in L_\alpha$ em lugar de $g(j\cdot) \in L_\alpha$, $\alpha = 2, \infty$)

Note-se que com a norma $\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} |g(j\omega)| < \infty$ L_∞ é um espaço de Banach e que, com o produto interno $\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) \bar{c} g(j\omega) d\omega$, L_2 é um espaço de Hilbert (Hoffman, 1962; Rudin 1966).

$$H_\infty = \{g : \mathcal{C}_+ \rightarrow \mathcal{C} : g \text{ é analítica e } \sup_{s \in \mathcal{C}_+} |g(s)| < \infty\}$$

$$H_2 = \{g : \mathcal{C}_+ \rightarrow \mathcal{C} : g \text{ é analítica, } \forall \sigma > 0 \text{ existe o limite}$$

$$\eta(g; \sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |g(\sigma + j\omega)|^2 d\omega \text{ e } \sup_{\sigma > 0} \eta(g; \sigma) < \infty\}$$

Note-se que com as normas $\|g\|_\infty = \sup_{s \in \mathcal{C}_+} |g(s)|$ e $\|g\|_2 = \sup_{\sigma > 0} \eta(g; \sigma)$ H_∞ e H_2 são espaços de Banach (espaços de Hardy) - cf. (Duren, 1970; Hoffman, 1962).

Para uma função $g \in H_\infty$ (ou $g \in H_2$) existem os limites $\bar{g}(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} g(\sigma + j\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R} - S_g$, onde S_g tem medida nula e $\bar{g} \in L_\infty$ (ou $\bar{g} \in L_2$) - ver (Duren, 1970) ou (Hoffman, 1962). Por um ligeiro abuso de notação vai-se identificar \bar{g} com g e, neste sentido, H_∞ é um subespaço fechado de L_∞ (H_2 é um subespaço fechado de L_2) - para $g \in H_\infty$ ($g \in H_2$),

$$\|g\|_\infty = \|g\|_{L_\infty} \quad (\|g\|_2 = \|g\|_{L_2})$$

Analogamente, definem-se H_∞^- e H_2^- trocando-se \mathcal{C}_+ por \mathcal{C}_- e “ $\sigma > 0$ ” por “ $\sigma < 0$ ” nas definições de H_∞^- e H_2^- ; existem as funções $\bar{g} \in L_\infty$ ou $\bar{g} \in L_2$ definidas por limites de $g(\sigma + j\omega)$ quando $\sigma \rightarrow 0$ pela esquerda e, identificando g e \bar{g} , H_∞^- e H_2^- são respectivamente subespaços fechados de L_∞ e L_2 . Além disso H_2^- é o complemento ortogonal de H_2 em L_2 (Teorema de Paley-Wiener) - cf. Rudin (1986). As projeções ortogonais de $v \in L_2$ em H_2 e H_2^- são denotadas por v_+ e v_- .

Definem-se ainda RL_∞ , RL_2 , RH_∞ , RH_2 , RH_∞^- , RH_2^- onde $RX = R_p \cap X$ - note-se que RL_∞ e RL_2 foram definidos na seção anterior,

$RH_\infty = S$ e $RH_2 = \{g \in S : \lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = 0\}$ e que a ortogonalidade de RH_2 e RH_2^- é uma consequência imediata do Lema 3.A.1.

Pode-se agora enunciar o seguinte lema (ver Francis, 1987).

Lema 1: (a) Seja $g \in L_\infty$. Então

$$\|g\|_\infty = \sup_{B_1(L_2)} \|gv\|_{L_2} = \sup_{B_1(H_2)} \|gv\|_{L_2}$$

onde $B_1(X_2) = \{v \in X_2 : \|v\|_{L_2} = 1\}$, $X = L, H$.

(b) Seja $g \in RL_\infty$. Então

$$\|g\|_\infty = \sup_{B_1(L_2)} \|gv\|_{L_2} = \sup_{B_1(H_2)} \|gv\|_{L_2} = \sup_{B_1(RH_2)} \|gv\|_{L_2}$$

onde $B_1(RH_2) = \{v \in RH_2 : \|v\|_2 = 1\}$. ∇

Somente a parte (b) do Lema 1 será de fato utilizada no desenvolvimento subsequente - esta parte é demonstrada no Apêndice. Para uma demonstração da parte (a) ver (Francis, 1987).

O Lema 1 estabelece a igualdade entre a norma de $g \in L_\infty$ e a norma induzida do operador $Z_g : L_2 \rightarrow L_2$, $Z_g[v] = gv$ e entre a norma de Z_g e a norma induzida de sua restrição a H_2 , i.e., $Z_g|_{H_2} : H_2 \rightarrow L_2$. A partir deste lema chega-se imediatamente a um limite inferior no valor do funcional $J_0 : H_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+^c$, $J_0(\hat{f}) = \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}$, onde $f_0 \in L_\infty$, qual seja

$$\begin{aligned} \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}^2 &= \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0 - \hat{f})v\|_{L_2}^2 = \\ &\sup_{B_1(H_2)} \{ \|(f_0v)_+ - (\hat{f}v)_+\|_2^2 + \|(f_0v)_- - (\hat{f}v)_-\|_2^2 \} \end{aligned}$$

e como $\hat{f} \in H_\infty$, $\hat{f}v \in H_2$ para todo $v \in H_2$ e, portanto, $(\hat{f}v)_- = 0$. Tem-se, então

$$\|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}^2 = \sup_{B_1(H_2)} \{ \|(f_0v)_+ - \hat{f}v\|_2^2 + \|(f_0v)_-\|_2^2 \}$$

e, portanto,

$$\forall \hat{f} \in H_\infty, \quad \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}^2 \geq \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0v)_-\|_2^2 \quad (5)$$

É claro que se $\widehat{f}_0 \in S$ atinge este limite, i.e., se

$$\|f_0 - \widehat{f}_0\|_{L_\infty}^2 = \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2$$

então \widehat{f}_0 é solução do problema definido em (4).

Vai-se agora investigar se, sob condições apropriadas, este limite inferior é atingido. Neste sentido, note-se inicialmente, que $\{v_k\}$ é uma seqüência em $B_1(H_2)$ tal que $\|(f_0 v_k)_-\|_{L_2} \rightarrow \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}$ e \widehat{f}_0 atinge o limite inferior, então

$\|(f_0 v_k)_+ - \widehat{f}_0 v_k\|_2 \rightarrow 0$. Em particular, se $v_k \rightarrow v_0$, i.e., se existe $v_0 \in B_1(H_2)$ tal que

$$\|(f_0 v_0)_-\|_{L_2} = \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2} \quad (6)$$

e \widehat{f}_0 atinge o limite inferior dado por (5), então $\widehat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+$. Pode-se, então, enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2: (a) Dado $f_0 \in L_\infty$,

$$\forall \widehat{f} \in H_\infty \quad , \quad \|f_0 - \widehat{f}\|_{L_\infty} \geq \sup_{v \in B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2$$

(b) Se existe $v_0 \in B_1(RH_2)$ tal que $\|(f_0 v_0)_-\|_{L_2} = \sup_{B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}$ então ou

$\widehat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ \in S$ e atinge o limite inferior em (a) (sendo portanto solução do problema (4)) ou este limite inferior não é alcançado em S . ∇

A Proposição 2 sugere que se investigue se existe $v_0 \in B_1(RH_2)$ que satisfaça a condição (6). Se tal v_0 existir deve-se então verificar se $\widehat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ \in S$ e se, de fato, esta função atinge o limite inferior dado por (5). Se todas estas questões forem respondidas positivamente, ter-se-á demonstrado que \widehat{f}_0 é solução do problema dado por (4).

Considera-se a seguir a questão da existência de $v_0 \in B_1(RH_2)$ que satisfaça a condição (6). Para explorar, na análise desta questão, o fato de f_0 ser real-racional, é conveniente lançar mão da transformada de Fourier complexa F (ver Rudin, 1966) e dos espaços $F(H_2)$,

$F(H_2^-)$, $F(L_2)$, onde

$$F_+ : H_2 \rightarrow L_2[0, \infty)$$

$$g \mapsto \check{g}(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad , \quad t \in [0, \infty)$$

$$F_- : H_2^- \rightarrow L_2(-\infty, 0]$$

$$g \mapsto \check{g}(t) = -F_+[g^-](-t) \quad , \quad t \in (-\infty, 0]$$

$$F : L_2 \rightarrow L_2(-\infty, \infty)$$

$$g \mapsto (F_+[g_+])_e + (F_-[g_-])_e$$

e onde, para $\check{f} \in L_2[0, \infty)$ (ou $L_2(-\infty, 0]$), $(\check{f})_e$ denota a extensão de \check{f} para $(-\infty, 0)$ (ou $(0, \infty)$) dada por $(\check{f})_e(t) = 0$ para $t \in (-\infty, 0)$ (ou $t \in (0, \infty)$). Algumas propriedades de F relevantes para o desenvolvimento subsequente são enunciadas a seguir.

Lema 2: (a) Sejam $g \in L_2$ e $\check{g} = F[g]$. Então $\|\check{g}\|_{L_2}^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |\check{g}(t)|^2 dt = \|g\|_{L_2}^2$.

(b) Sejam $g \in L_2$, g_+ e g_- as projeções ortogonais de g em H_2 e H_2^- , respectivamente. Então,

$$\begin{cases} F[g_+](t) = F[g](t), \forall t \in [0, \infty) \\ F[g_+](t) = 0, \forall t \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} F[g_-](t) = F[g](t), \forall t \in (-\infty, 0] \\ F[g_-](t) = 0, \forall t \in (0, \infty, 0) \end{cases}$$

(c) Sejam $g \in L_2 \cap L_\infty$, $h \in L_2$, $\check{g} = F[g]$, $\check{h} = F[h]$. Então $gh \in L_2$ e

$$F[gh](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(t - \tau) \check{h}(\tau) dz \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

▽

Ora, $f_0 \in RH_2^-$ e $RH_2^- \subset RH_\infty^-$; portanto $f_0 \in L_2 \cap L_\infty$. Segue-se, então, do Lema 2(c) que $\forall v \in H_2$, $F[f_0 v](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}_0(t - z) \check{v}(z) dz$, $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, pelo Lema 2(b).

$$F[(f_0 v)_-](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}_0(t - z) \check{v}(z) dz \quad , \quad t \in (-\infty, 0] \quad (7)$$

Mas $v \in H_2$, o que implica $\check{v}(t) = 0$, $\forall t \in (-\infty, 0)$ e, portanto, segue-se de (7) que

$$F[(f_0 v)_-](t) = \int_0^{\infty} \check{f}_0(t - z) \check{v}(z) dz \quad t \in (-\infty, 0] \quad (8)$$

Devido ao Lema 2(a), $\|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2 = \|F[(f_0 v)_-]\|_{L_2}^2$ e este fato juntamente com a expressão (8) permite explorar efetivamente o fato de f_0 ser real-racional na análise da questão da existência de v_0 que satisfaça a condição (6). Neste sentido, note-se inicialmente que, como $f_0 \in RH_2^-$, existem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

- (i) os autovalores de A são polos de f_0
- (ii) $f_0(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$, $\forall s \in \mathcal{C}$ tal que s não é polo de f_0
- (iii) os Gramianos

$$G_r \triangleq \int_0^\infty \exp(-At) b b^T \exp(-A^T t) dt \quad \text{e} \quad G_\theta \triangleq \int_0^\infty \exp(-A^T t) c c^T \exp(-At) dt$$

são não-singulares (ver Lema A.1).

Portanto, $\tilde{f}_0(t) = c^T \exp(At) b$, $t \in (-\infty, 0]$. Segue-se, então, de (8), que

$$\begin{aligned} F[(f_0 v)_-](t) &= \int_0^\infty c^T \exp\{A(t-\tau)\} b \tilde{v}(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow \\ F[(f_0 v)_-](t) &= c^T \exp(At) \int_0^\infty \exp(-A\tau) b \tilde{v}(\tau) d\tau \quad t \in (-\infty, 0] \end{aligned} \quad (9)$$

Fazendo $[u_1 \cdots u_n](\tau) \triangleq b^T \exp(-A^T \tau)$, $\tau \in [0, \infty)$, decorre do fato dos autovalores de A terem parte real positiva que $u_k \in L_2[0, \infty)$. Além disso, o subespaço gerado por u_1, \dots, u_n (denotado por S_u) é fechado - por ser de dimensão finita segue-se então do Teorema da Projeção Ortogonal (Naylor & Sell, 1971) que $\tilde{v} \in L_2[0, \infty)$ pode ser escrito como $\tilde{v} = v_c + v_1$, onde $v_c \in S_u$ e $v_1 \in (S_u)^\perp$ e, portanto, obtém-se a partir de (9)

$$F[(f_0 v)_-](t) = c^T \exp(At) \int_0^\infty \exp(-A\tau) b v_c(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, 0] \quad (10)$$

Seja $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ uma base ortonormal para S_u , isto é, $\bar{u}_k \in S_u$ e

$$\int_{-\infty}^\infty \begin{bmatrix} \bar{u}_1(\tau) \\ \vdots \\ \bar{u}_n(\tau) \end{bmatrix} [\bar{u}_1(\tau) \cdots \bar{u}_n(\tau)] d\tau = I$$

ou seja, $[\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_n] = [u_1 \cdots u_n] M_c$, para algum $M_c \in \mathcal{C}^{n \times n}$ tal que

$$M_c^* \left[\int_{-\infty}^\infty \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ \vdots \\ u_n(\tau) \end{bmatrix} [u_1(\tau) \cdots u_n(\tau)] dt \right] M_c = M_c^* G_r M_c = I$$

(note-se que a dimensão de S_u é n devido ao fato de G_r ser não-singular). Pode-se então escrever $v_c = [\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_n]\alpha$ onde $\alpha \in \mathcal{C}^n$ é tal que

$$\|v_c\|_2^2 = \int_0^\infty |v_c(t)|^2 dt = \|\alpha\|_2^2$$

e, assim, segue-se de (10) que

$$\begin{aligned} F[(f_0 v)_-](t) &= c^T \exp(At) \left[\int_0^\infty \exp(-A\tau) b b^T \exp(-A^T \tau) d\tau \right] M_c \alpha \Leftrightarrow \\ F[(f_0 v)_-](t) &= c^T \exp(At) G_r M_c \alpha \end{aligned}$$

$$\text{ou, fazendo } M_c = G_r^{-1/2}, \quad F[(f_0 v)_-](t) = c^T \exp(At) G_r^{1/2} \alpha \quad (11)$$

Segue-se então do Lema 2(a) e de (11) que

$$\|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2 = \alpha^* G_r^{1/2} \left[\int_{-\infty}^0 \exp(A^T t) c c^T \exp(At) dt \right] G_r^{1/2} \alpha = \alpha^* \left[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2} \right] \alpha \quad (12)$$

Ora, se $v \in B_1(H_2)$, decorre do Lema 2(a) e do fato de $\tilde{v} = F_+[v] = v_c + v_1$ que

$$\|v\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty |v_c(t)|^2 dt + \int_0^\infty |v_1(t)|^2 dt = \|\alpha\|_2^2 + \int_0^\infty |v_1(t)|^2 dt = 1$$

Por outro lado, $\|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2$ depende so de α (devido ao (12)). Portanto, dado $v \in B_1(H_2)$ existe $\bar{v} \in B_1(H_2)$ tal que

$$F[\bar{v}] = [\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_n] \bar{\alpha}, \quad \|\bar{\alpha}\|_2 = 1 \quad \text{e} \quad \|(f_0 \bar{v})_-\|_{L_2} \leq \|(f_0 v)_-\|_{L_2}$$

(basta tomar $\bar{\alpha} = \frac{1}{\|\alpha\|_2} \alpha$ se $\alpha \neq 0$ ou $\bar{\alpha} \neq 0$ se $\alpha = 0$).

Isto implica que o $\eta_H = \sup_{v \in B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}$ é alcançado em $B_1(H_2)$ se e somente se η_H é alcançado em $B_1(H_2) \cap S_u$, ou equivalentemente, se existe $\alpha_0 \in \mathcal{C}^n$ tal que

$$\|\alpha_0\|_2 = 1 \text{ e}$$

$$\alpha_0^* \left[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2} \right] \alpha_0 = \sup_{\alpha \in B_1(\mathcal{C})} \alpha^* \left[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2} \right] \alpha \quad (13)$$

quando então $v_0 \triangleq [\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_n] \alpha_0$ é tal que

$$\|(f_0 v_0)_-\|_{L_2} = \sup_{v \in B_1(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}$$

Como $B_1(\mathcal{C}^n)$ é um conjunto compacto e formas quadráticas em \mathcal{C}^n são aplicações contínuas, existe $\alpha_0 \in B_1(\mathcal{C}^n)$ que satisfaz (13), ficando então assegurada a existência de $v_0 \in B_1(H_2)$ que satisfaz a condição (6) - conforme sumarizado na proposição enunciada a seguir.

Proposição 3: Seja $v_0(s) \triangleq b^T(sI + A^T)^{-1}G_r^{-1/2}\alpha_0$, $\forall s \in \mathcal{C}$ tal que $\det(sI + A^T) \neq 0$, onde $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor unitário associado ao maior autovalor de $(G_r^{1/2}G_0G_r^{1/2})$. Então, $v_0 \in RH_2$, $\|v_0\|_2 = 1$ e

$$\|(f_0v_0)_-\|_{L_2}^2 = \alpha_0^T [G_r^{1/2}G_0G_r^{1/2}]\alpha_0 = \sup_{v \in B_1(H_2)} \|(f_0v)_-\|_{L_2}^2$$

▽

Demonstração: Note-se inicialmente que, por construção, G_r é simétrica positiva definida e portanto $G_r^{1/2}$ é não singular. Além disso,

$$G_r^{1/2}G_0G_r^{1/2} = (G_r^{1/2}G_0^{1/2})(G_0^{1/2}G_r^{1/2}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

é simétrica. Portanto, seus autovalores são reais e a cada um deles estão associados autovetores reais.

Demonstra-se agora que $v_0 \in RH_2$. Para isto observe-se que

$$v_0(s) = \frac{1}{\det(sI + A)} b^T [\text{cof}(sI + A^T)]^T G_r^{-1/2} \alpha_0 \quad \text{é real-racional}$$

Como os autovetores de A estão em \mathcal{C}_+ , os de $(-A^T)$ estão em \mathcal{C}_- ; portanto v_0 não tem polos em \mathcal{C}_+ . Além disso $\lim_{s \rightarrow \infty} v_0(s) = 0$ pois o grau do polinômio $\det(sI + A)$ é maior do que o grau do polinômio $b^T (\text{cof}(sI + A^T))^T G_r^{-1/2} \alpha_0$. Portanto $v_0 \in RH_2$.

Com respeito a $\|v\|_2$, decorre do Lema 2(a) que

$$\|v_0\|_2^2 = \|F_+[v_0]\|_2^2 = \int_0^\infty \alpha_0^T G_r^{-1/2} \exp(-At) b b^T \exp(-A^T t) G_r^{-1/2} \alpha_0 dt$$

$$\|v_0\|_2^2 = \alpha_0^T G_r^{-1/2} \left[\int_0^\infty \exp(-At) b b^T \exp(-A^T t) dt \right] G_r^{-1/2} \alpha_0$$

$$\text{ou seja } \|v_0\|_2^2 = \alpha_0^T G_r^{-1/2} \alpha_0 = \|\alpha_0\|_2^2 = 1$$

Para concluir a demonstração note-se que devido ao Lema 2 e a (12)

$$\|(f_0 v_0)_-\|_2^2 = \alpha_0^T G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2} \alpha_0 = \bar{\lambda}[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}]$$

e $\forall v \in B_1(H_2)$, $\|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2 = \alpha^* G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2} \alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{C}^n$ tal que $\|\alpha\|_2 \leq 1$.
Portanto,

$$\|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2 \leq \bar{\lambda}[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}] \alpha^* \alpha \leq \bar{\lambda}[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}]$$

e assim,

$$\|(f_0 v_0)_-\|_{L_2}^2 = \bar{\lambda}[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}] = \sup_{v_1 \in B(H_2)} \|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2$$

onde $\bar{\lambda}(X)$ denota o maior autovalor de X . □

A Proposição 3 estabelece a existência de v_0 real-racional que satisfaz a condição (6). Segue-se, então, da Proposição (2) (b) que só $\hat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+$ pode atingir o limite inferior de $\{\|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty} : \hat{f} \in H_\infty\}$ dado pela Proposição (2) (a).

Serão agora examinadas as seguintes questões:

(a) $\hat{f}_0 \stackrel{\Delta}{=} v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ \in S$

(b) O limite inferior de $\|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}$ para $\hat{f} \in H_\infty$ dado por (5) é atingido por \hat{f}_0 , i.e.,

$$\sup_{\hat{f} \in H_\infty} \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty} = \|f_0 - \hat{f}_0\|_{L_\infty}$$

se as respostas a estas questões forem positivas então \hat{f}_0 é solução do problema $\min_{\hat{f} \in S} \|f_0 - \hat{f}\|_{L_\infty}$.

Com relação a (a), note-se, inicialmente, que se v_0 tem zeros em \mathcal{C}_+ estes zeros podem ser polos de f_0 , quando então $\hat{f}_0 \notin S$. Na realidade, quando v_0 tem zeros em \mathcal{C}_+ , se $\hat{f}_0 \in S$ então estes zeros de v_0 são também zeros de $(f_0 v_0)_+$. No sentido de investigar a relação entre os zeros de v_0 e de $(f_0 v_0)_+$ em \mathcal{C}_+ , considere-se a seguinte proposição

Proposição 4: $\forall v \in RH_2$, $\|v_{in}(f_0 v_\theta)_- - (f_0 v)_-\|_{L_2}^2 = \|(f_0 v_\theta)_-\|_{L_2}^2 - \|(f_0 v)_-\|_{L_2}^2$

onde $v = v_{in} v_\theta$, $\forall w \in \mathbb{R}$, $|v_{in}(j\omega)| = 1$, $\forall s \in \mathcal{C}_+$, $v_0(s) \neq 0$. ▽

Demonstração:

$$\|v_{in}(f_0v_\theta)_- - (f_0v)_-\|_{L_2}^2 = \|v_{in}(f_0v_\theta)_-\|_{L_2}^2 + \|(f_0v)_-\|_{L_2}^2 - 2\operatorname{Re} \langle v_{in}(f_0v_\theta)_-, (f_0v)_- \rangle \Leftrightarrow$$

$$\|v_{in}(f_0v_\theta)_- - (f_0v)_-\|_{L_2}^2 = \|(f_0v_\theta)_-\|_{L_2}^2 + \|(f_0v)_-\|_{L_2}^2 - 2\operatorname{Re} \langle v_{in}(f_0v_\theta)_-, (f_0v)_- \rangle$$

já que $\forall \omega \in \mathbb{R}, |v_{in}(j\omega)| = 1$.

Por outro lado,

$$\langle v_{in}(f_0v_\theta)_-, (f_0v)_- \rangle = \langle v_{in}(f_0v_\theta), (f_0v)_- \rangle - \langle v_{in}(f_0v_\theta)_+, (f_0v)_- \rangle,$$

pois $(f_0v_\theta)_- = f_0v_\theta - (f_0v_\theta)_+$, e, então

$$\langle v_{in}(f_0v_\theta)_-, (f_0v)_- \rangle = \langle v_{in}(f_0v_\theta), (f_0v)_- \rangle$$

já que $v_{in}(f_0v_\theta)_+ \in H_2$ e $(f_0v)_- \in H_2^-$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle v_{in}(f_0v_\theta)_-, (f_0v)_- \rangle &= \langle v_{in}(f_0v_\theta), (f_0v)_- \rangle = \langle f_0v, (f_0v)_- \rangle \\ &= \langle (f_0v)_-, (f_0v)_- \rangle \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|v_{in}(f_0v_\theta)_- - (f_0v)_-\|_{L_2}^2 &= \|(f_0v_\theta)_-\|_{L_2}^2 + \|(f_0v)_-\|_{L_2}^2 - 2\|(f_0v)_-\|_{L_2}^2 \Leftrightarrow \\ \|v_{in}(f_0v_\theta)_- - (f_0v)_-\|_{L_2}^2 &= \|(f_0v_\theta)_-\|_{L_2}^2 - \|(f_0v)_-\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

□

Segue-se da Proposição 4 que $\forall v \in RH_2, \|(f_0v_\theta)_-\|_{L_2} \geq \|(f_0v)_-\|_{L_2}$ (onde $v = v_{in}v_\theta$, v_{in} e v_θ como no enunciado da mesma); por outro lado, como v_0 satisfaz a condição (6), escrevendo-se $v_0 = v_{in}^0 v_\theta^0$, onde onde $\forall w \in \mathbb{R} |v_{in}^0(jw)| = 1$ e $\forall s \in \mathcal{C}_+, v_\theta^0(s) \neq 0$, chega-se a

$$\|(f_0v_0)_-\|_{L_2} \geq \|(f_0v_\theta^0)_-\|_{L_2}$$

pois $v_\theta^0 \in B_1(H_2)$ (já que $\|v_0\|_2 = \|v_\theta^0\|_2$). Portanto,

$$\|(f_0v_0)_-\|_{L_2} = \|(f_0v_\theta^0)_-\|_{L_2}$$

o que, justamente com a Proposição 4, implica em

$$\|v_{in}^0(f_0v_\theta^0)_- - (f_0v_0)_-\|_{L_2} = 0 \Leftrightarrow (f_0v_0)_- = v_{in}^0(f_0v_\theta^0)_-$$

Segue-se, então que

$$\begin{aligned}(f_0 v_0)_+ &= f_0 v_0 - (f_0 v_0)_- = v_{in}[f_0 v_0 - (f_0 v_\theta^0)_-] \Rightarrow \\ \widehat{f}_0 &= v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ = v_\theta^{-1}[f_0 v_\theta - (f_0 v_\theta^0)_-] = v_\theta^{-1}(f_0 v_\theta^0)_+\end{aligned}$$

Vê-se assim que se v_0 tem zeros em \mathcal{C}_+ , $(f_0 v_0)_+$ tem os mesmos zeros e, portanto, \widehat{f}_0 não tem polos em \mathcal{C}_+ . Desta forma, a questão (a) acima resume-se a \widehat{f}_0 não ter polos em $j\mathbb{R}$ e ser própria, ou equivalentemente, a \widehat{f}_0 ser limitada em $j\mathbb{R}$ (i.e., $\widehat{f}_0 \in RL_\infty$). Note-se ainda que, como

$$\widehat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ = v_0^{-1}[f_0 v_0 - (f_0 v_0)_-] = f_0 - v_0^{-1}(f_0 v_0)_-$$

e $f_0 \in RL_\infty$, $\widehat{f}_0 \in RL_\infty$ se e somente se $v_0^{-1}(f_0 v_0)_- \in RL_\infty$. A questão (a) pode então ser re-escrita da seguinte forma

$$(a) \quad v_0^{-1}(f_0 v_0)_- \in RL_\infty. \tag{14}$$

Com relação a (b), note-se que

$$f_0 - \widehat{f}_0 = f_0 - v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ = v_0^{-1}(f_0 v_0) - v_0^{-1}(f_0 v_0)_+ = v_0^{-1}(f_0 v_0)_-;$$

portanto,

$$\|f_0 - \widehat{f}_0\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} | [v_0^{-1}(f_0 v_0)_-](j\omega) |$$

de forma que a questão (b) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$(b) \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} | [v_0^{-1}(f_0 v_0)_-](j\omega) | = \| (f_0 v_0)_- \|_{L_2} \tag{15}$$

A proposição enunciada a seguir estabelece uma relação entre v_0 e $(f_0 v_0)_-$, a partir da qual estas questões são respondidas.

Proposição 5:

$$\sigma_0^2 v_0 \sim v_0 = [(f_0 v_0)_-] \sim [(f_0 v_0)_-]$$

onde σ_0^2 é o maior autovalor de $G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}$. ▽

Demonstração: Pela Proposição 3, $v_0(s) = b^T(sI + A^T)^{-1} G_r^{-1/2} \alpha_0$ (ou seja,

$\check{v}_0 - [\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_n] \alpha_0$). Segue-se, portanto, de (11) que

$$(f_0 v_0)_-(s) = c^T (sI - A)^{-1} G_r^{1/2} \alpha_0, \text{ ou definindo } \gamma_0 \triangleq G_r^{-1/2} \alpha_0,$$

$$v_0(s) = b^T (sI + A^T)^{-1} \gamma_0 \quad , \quad (f_0 v_0)_-(s) = c^T (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0 \quad (16)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_0 \tilde{\sim}(s) v_0(s) &= \gamma_0^T (-sI + A)^{-1} b b^T (sI + A^T)^{-1} \gamma_0 = \\ &\quad - \gamma_0^T (sI - A)^{-1} b b^T (sI + A^T)^{-1} \gamma_0 \\ [(f_0 v_0)_-] \tilde{\sim}(s) [(f_0 v_0)_-](s) &= \gamma_0^T G_r (-sI - A^T)^{-1} c c^T (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0 = \\ &\quad - \gamma_0^T G_r (sI + A^T)^{-1} c c^T (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Por outro lado não é difícil verificar que os Gramianos G_r e G_0 satisfazem as seguintes equações de Lyapunov (cf. Francis, 1987)

$$A G_r + G_r A^T = b b^T \quad , \quad A^T G_0 + G_0 A = c c^T \quad (18)$$

Segue-se então de (18) que

$$-s G_r + A G_r + G_r s + G_r A^T = -(sI - A) G_r + G_r (sI + A^T) = b b^T$$

ou seja,

$$-G_r (sI + A^T)^{-1} + (sI - A)^{-1} G_r = (sI - A)^{-1} b b^T (sI + A^T)^{-1} \quad (19.a)$$

e, analogamente,

$$s G_0 + A^T G_0 - G_0 s + G_0 A = (sI + A^T) G_0 - G_0 (sI - A) = c c^T$$

ou seja,

$$G_0 (sI - A)^{-1} - (sI + A^T)^{-1} G_0 = (sI + A^T)^{-1} c c^T (sI - A)^{-1} \quad (19.b)$$

De (17) e (19) tem-se então

$$\begin{aligned} v_0 \tilde{\sim}(s) v_0(s) &= -\gamma_0^T \{ -G_r (sI + A^T)^{-1} + (sI - A)^{-1} G_r \} \gamma_0 = \\ &= \gamma_0^T G_r (sI + A^T)^{-1} \gamma_0 - \gamma_0^T (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0 \end{aligned} \quad (20.a)$$

$$\begin{aligned} [(f_0 v_0)_-] \tilde{\sim}(s) [(f_0 v_0)_-](s) &= -\gamma_0^T G_r \{ G_0 (sI - A)^{-1} - (sI + A^T)^{-1} G_0 \} G_r \gamma_0 \\ &= -\gamma_0^T G_r G_0 (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0 + \gamma_0^T G_r (sI + A^T)^{-1} G_0 G_r \gamma_0 \end{aligned} \quad (20.b)$$

Note-se, a seguir, que como $[G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}] \alpha_0 = \sigma_0^2 \alpha_0$ onde σ_0^2 é o maior autovalor de $G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}$, então

$$\sigma_0^2 (G_r^{-1/2} \alpha_0) = G_0 G_r (G_r^{-1/2} \alpha_0) \Leftrightarrow G_0 G_r \gamma_0 = \sigma_0^2 \sigma_0 \quad (21)$$

Segue-se então de (20.b) que

$$[(f_0 v_0)_- \sim](s) [(f_0 v_0)_-](s) = \gamma_0^T G_r (sI + A^T)^{-1} (\sigma_0^2 \gamma_0) - (\gamma_0^T \sigma_0^2) (sI - A)^{-1} G_r \gamma_0$$

e portanto, devido a (20.a) ,

$$[(f_0 v_0)] \sim [(f_0 v_0)_-] = \sigma_0^2 v_0 \sim v_0$$

□

Retornando então à questão (b) na forma dada por (15), note-se que como v_0 e $(f_0 v_0)_-$ são real-rationais; $\forall v \in H_2$

$$\|v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\|_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} v^c(j\omega) \{[(f_0 v_0)_- \sim] (v_0^{-1}) \sim v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\}(j\omega) d\omega \quad , \text{ ou seja,}$$

$$\|v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^c(j\omega) \{[v_0 \sim v_0]^{-1} (f_0 v_0)_- \sim (f_0 v_0)_-\}(j\omega) v(j\omega) d\omega$$

e portanto, pela Proposição 4,

$$\|v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^c(j\omega) \sigma_0^2 v(j\omega) d\omega = \sigma_0^2 \|v\|_2^2$$

Tem-se então

$$\sup_{v \in B_1(H_2)} \|v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\|_{L_2} = \sigma_0 \quad (22)$$

Por outro lado, devido ao Lema 2(a) e a (12)

$$\|(f_0 v_0)_-\|_2^2 = \alpha_0^T [G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}] \alpha_0 = \sigma_0^2$$

segundo-se então, de (22), que

$$\sup_{v \in B_1(H_2)} \|v_0^{-1} (f_0 v_0)_- v\|_{L_2} = \|(f_0 v_0)_-\|_2 = \sigma_0$$

o que responde afirmativamente a questão (b).

Pode-se então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1: Seja $f_0 \in RH_2^-$. O problema de otimização $\min_{\hat{f} \in RH_\infty} \|f_0 - \hat{f}\|$ tem como única solução $\hat{f}_0 = v_0^{-1}(f_0 v_0)_+$, onde para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$f_0(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad , \quad G_r \quad \text{e} \quad G_0 \quad \text{são não-singulares,}$$

$v_0(s) = b^T (sI + A^T)^{-1} G_r^{-1/2} \alpha_0$ e α_0 é um autovetor unitário associado ao maior autovalor de $G_r^{1/2} G_0 G_r^{1/2}$. ▽

Com base neste teorema e na Proposição 1 resolve-se o problema de otimização da margem de estabilidade relativa a perturbações estáveis.

É este o conteúdo do teorema apresentado a seguir.

Teorema 2: Sejam $P_2^0 \in R_p$, $P_2^0 = N_2^0 (D_2^0)^{-1}$ onde $N_2^0 \in S$, $D_2^0 \in S$ coprimas e D_2^0 é biprópria. Seja $W_s \in U(S)$. Suponha-se que $D_2^0(j\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Então um controlador estabilizante

$$C = (KN_2^0 + Y_0)^{-1} [R \ : \ KD_2^0 - X_0] \quad \text{onde} \quad R \in S \quad , \quad K \in S$$

maximiza a margem de estabilidade em relação à família

$$S_p(P_2^0; \alpha) \triangleq \{P_2 = P_2^0 + E : E \in S \text{ e } \|W_s E\|_\infty < \alpha\} \quad , \quad \alpha > 0$$

se e somente $K = K_{opt} \triangleq -a_\theta^{-1}(\hat{f}_0 + b_+)$,

para a_θ e b_+ como na Proposição 1 e \hat{f}_0 como no Teorema 1 (para $f_0 = \cdot b_-$). ▽

Apêndice da seção 4

Demonstração do Lema 1(b):

Note-se, inicialmente, que (como $g \in L_\infty$)

$$\begin{aligned} \forall v \in L_2, \|gv\|_{L_2}^2 &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |g(j\omega)|^2 |v(j\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega = \|g\|_{L_\infty}^2 \|v\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Portanto,

$$\sup_{v \in B_1(RH_2)} \|gv\|_{L_2}^2 \leq \sup_{v \in B_1(H_2)} \|gv\|_{L_2}^2 \leq \sup_{v \in B_1(L_2)} \|gv\|_{L_2}^2 \leq \|g\|_{L_\infty}^2 \quad (2)$$

Vai-se agora demonstrar que $\forall g \in RL_\infty$,

$$\sup_{v \in B_1(RH_2)} \|gv\|_{L_2}^2 = \|g\|_{L_\infty}^2 \quad (3)$$

isto concluirá a demonstração já que (2) e (3) implicam em

$$\forall g \in RL_\infty, \sup_{v \in B_1(RH_2)} \|gv\|_{L_2}^2 = \sup_{v \in B_1(H_2)} \|gv\|_{L_2}^2 = \sup_{v \in B_1(L_2)} \|gv\|_{L_2}^2 = \|g\|_{L_\infty}^2$$

A demonstração de (3) será feita a seguir apresentando-se, para um dado $g \in RL_\infty$, uma seqüência $\{v_k\} \subset B_1(RH_2)$ tal que $\|gv_k\|_{L_2}^2 \rightarrow \|g\|_{L_\infty}^2$.

Observe-se, inicialmente, que para g e v real-rationais

$\{[gv](j\omega)\}^c = [gv](-j\omega)$; portanto,

$$\forall g \in RL_\infty, \forall v \in RL_2, \|gv\|_{L_2}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |[gv](j\omega)|^2 d\omega = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} |[gv](j\omega)|^2 d\omega \quad (4)$$

Considerem-se agora seqüências $\{\mu_k\} \subset RH_2$ definidas em função de $\omega_0 \in \mathbb{R}_+$ e $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\mu_k(s; \omega_0, \{\varepsilon_k\}) \triangleq \frac{2s}{(s + (\varepsilon_k + j\omega_0))(s + (\varepsilon_k - j\omega_0))} \quad (5)$$

Como $\forall k \in \mathbb{N}, \mu_k \in RH_2$ e $\mu_k \neq 0$, pode-se definir

$$\{\tilde{\mu}_k = \gamma_k \mu_k\} \subset B_1(RH_2) \quad , \quad \text{onde} \quad \gamma_k \triangleq (\|\mu_k\|_2)^{-1}$$

a propriedade da seqüência $\{\tilde{\mu}_k\}$ de relevância para esta demonstração é o fato da “energia de $\tilde{\mu}_k(j\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ se concentrar em torno de ω_0 e $(-\omega_0)$ quando $k \rightarrow \infty$ ”; este fato é enunciado de forma precisa na seguinte proposição

Proposição A.1: Sejam $\omega_0 \in \mathbb{R}$ e $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Então, $\frac{1}{\pi} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow \infty$, e portanto,

$$\left\{ \left[(2\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega + (2\pi)^{-1} \int_{I_k(-\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \right] - \|\tilde{\mu}_k\|_2^2 \right\} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$,

onde, $\forall \omega_0 \neq 0, I_k(\omega_0) \triangleq [\omega_0 - \delta_k, \omega_0 + \delta_k], I_k(0) \triangleq [0, \delta_k]$ e $\delta_k = \varepsilon_k^{1/2}$ ▽

Ora, devido a (4), $\forall g \in RL_\infty, \forall \omega_0 \neq 0$ e $\forall k$ tal que $\delta_k < \omega_0$ (ou, no caso de $\omega_0 = 0, \forall k \in \mathbb{N}$),

$$\begin{aligned} \|g\tilde{\mu}_k\|_{L_2}^2 &= (\pi)^{-1} \int_0^\infty |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega = (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \\ &+ (\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_0)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\inf_{\omega \in I_k(\omega_0)} |g(j\omega)|^2 (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \\ &\leq (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\sup_{\omega \in I_k(\omega_0)} |g(j\omega)|^2 (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

e como g é contínua e $\delta_k \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \inf_{\omega \in I_k(\omega_0)} |g(j\omega)|^2 & \rightarrow |g(j\omega_0)|^2 \\ \sup_{\omega \in I_k(\omega_0)} |g(j\omega)|^2 & \rightarrow |g(j\omega_0)|^2 \end{cases} \quad (8)$$

Segue-se, então, de (7), (8) e da Proposição A.1 que

$$(\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \rightarrow |g(j\omega_0)|^2 \quad (9)$$

Pode-se agora demonstrar a proposição dada por (3) para o caso em que $g \in RL_\infty$ é tal que $\|g\|_{L_\infty} = |g(j\omega_0)|$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ (sem perda de generalidade ω_0 pode ser tomado em \mathbb{R}_+^c). Neste sentido, note-se que de (1) segue-se que $\|g\tilde{\mu}_k\|_{L_2}^2 \leq \|g\|_{L_\infty}^2 = |g(j\omega_0)|^2$.

Decorre, portanto de (6) (já que $\delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$) que

$$(\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \leq \|g\tilde{u}_k\|_{L_2}^2 \leq |g(j\omega_0)|^2$$

o que, juntamente com (9), demonstra que $\|g\tilde{u}_k\|_{L_2}^2 \rightarrow |g(j\omega_0)|^2 = \|g\|_{L_\infty}^2$.

Demonstra-se agora a proposição dada por (3) para o caso em que $g \in RL_\infty$ é tal que $\|g\|_{L_\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |g(j\omega)|$. Neste sentido, tome-se a seqüência $\{\mu_k^1\} \subset RH_2$ definida por $\mu_k^1(s) \triangleq \mu_k(s; \omega_k, \varepsilon_k)$ onde $\{\omega_k\} \subset \mathbb{R}_+$, $\omega_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Note-se que $\|\mu_k^1\|_2 = \|\mu_k\|_2 = (\gamma_k)^{-1} = \varepsilon_k^{-1/2}$ de modo que $\{\tilde{\mu}_k = \gamma_k \mu_k^1\} \subset B_1(RH_2)$.

Ora, $\forall k$ tal que $\omega_k > \delta_k$

$$\|g\tilde{\mu}_k\|_2^2 = (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega + (\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_k)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega$$

e, então, devido a (1), $\forall k$ tal que $\omega_k > \delta_k$

$$(\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \leq \|g\tilde{\mu}_k\|_{L_2}^2 \leq \|g\|_{L_\infty}^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |g(j\omega)|^2$$

Além disso,

$$(\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |[g\tilde{\mu}_k](j\omega)|^2 d\omega \geq \inf_{\omega \in I_k(\omega_k)} |g(j\omega)|^2 (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega$$

de modo que

$$\inf_{\omega \in I_k(\omega_k)} |g(j\omega)|^2 (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \leq \|g\tilde{\mu}_k\|_{L_2}^2 \leq \|g\|_{L_\infty}^2 \quad (10)$$

Ora, pelo argumento utilizado na demonstração da Proposição A.1

$$1 - \left[4\gamma_k^2 \left(\frac{2}{\delta_k} - \frac{1}{\omega_k} \right) \right] \leq (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \leq 1$$

e, como, $\gamma_k^2/\delta_k \rightarrow 0$, $\gamma_k^2 \rightarrow 0$ e $\omega_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, então

$$(\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_k)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow 1 \quad (11)$$

Por outro lado, como $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |g(j\omega)|^2 \rightarrow \|g\|_{L_\infty}^2$, $\omega_k \rightarrow \infty$ e $\delta_k \rightarrow \infty$, então

$$\inf_{\omega \in I_k(\omega_k)} |g(j\omega)|^2 \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} |g(j\omega)|^2 = \|g\|_{L_\infty}^2 \quad (12)$$

Segue-se, então, de (10)-(12) que

$$\|g\tilde{\mu}_k\|_{L_2}^2 \rightarrow \|g\|_{L_\infty}^2$$

□

Demonstração da Proposição A.1:

Note-se, inicialmente que, devido a (4)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_k\|_2^2 &= 1 = (\pi)^{-1} \int_0^\infty |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \\ &= (\pi)^{-1} \int_{I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega + (\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

e, portanto, é suficiente demonstrar que $\int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Neste sentido, note-se que $\forall \omega \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 = \frac{4\omega^2\gamma_k}{[\varepsilon_k^2 + (\omega + \omega_0)^2][\varepsilon_k^2 + (\omega - \omega_0)^2]}$$

e, portanto, como

$$[\varepsilon_k^2 + (\omega + \omega_0)^2][\varepsilon_k^2 + (\omega - \omega_0)^2] \geq \omega^2 [\varepsilon_k^2 + (\omega - \omega_0)^2] \geq \omega^2(\omega - \omega_0)^2,$$

$$|\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 \leq \frac{4\omega^2\gamma_k^2}{\omega^2(\omega - \omega_0)^2} = \frac{4\gamma_k^2}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Assim

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \leq 4\gamma_k^2 \int_{\mathbb{R}_+^c - I_k(\omega_0)} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

Ora, para $\omega_0 \neq 0$ e k tal que $\delta_k < \omega_0$

$$\int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \int_0^{\omega_0 - \delta_k} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega + \int_{\omega_0 + \delta_k}^{\infty} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

ou seja

$$\int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \left[\frac{1}{\delta_k} - \frac{1}{\omega_0} \right] + \frac{1}{\delta_k}$$

E para $\omega_0 = 0$

$$\int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \int_{\delta_k}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{\delta_k}$$

Assim, para $\omega_0 \neq 0$ e k tal que $\delta_k < \omega_0$

$$0 \leq \int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{4\gamma_k^2}{\delta_k} - \frac{4\gamma_k^2}{\omega_0}$$

e para $\omega_0 = 0$

$$0 \leq \int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{4\gamma_k^2}{\delta_k}$$

Portanto para $\{\delta_k\}$ tal que $\delta_k \rightarrow 0$ e $\gamma_k^2/\delta_k \rightarrow 0$ (por exemplo, $\delta_k = \gamma_k$ e $\gamma_k \rightarrow 0$), $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}_+^c$

$$\int_{R_+^c - I_k(\omega_0)} |\tilde{\mu}_k(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow 0$$

A demonstração é concluída observando-se que $\gamma_k^2 = \varepsilon_k$ - de fato.

$$\begin{aligned} \|\mu_k\|_2^2 &= 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2s}{[s - (\varepsilon_k + j\omega_0)][s - (\varepsilon_k - j\omega_0)]} \\ &\quad \cdot \frac{-2s}{[s + (\varepsilon_k + j\omega_0)][s + (\varepsilon_k - j\omega_0)]} \Big|_{s=j\omega} d\omega \Leftrightarrow \\ \|\mu_k\|_2^2 &= \frac{-4s^2}{[s - (\varepsilon_k + j\omega_0)][s - (\varepsilon_k - j\omega_0)][s + (\varepsilon_k - j\omega_0)]} \Big|_{s=-(\varepsilon_k + j\omega_0)} + \\ &\quad + \frac{-4s^2}{[s - (\varepsilon_k + j\omega_0)][s - (\varepsilon_k - j\omega_0)][s + (\varepsilon_k + j\omega_0)]} \Big|_{s=-(\varepsilon_k - j\omega_0)} \\ \|\mu_k\|_2^2 &= \frac{-4(\varepsilon_k + j\omega_0)^2}{[-2(\varepsilon_k + j\omega_0)][-2\varepsilon_k][-2j\omega_0]} + \frac{-4(\varepsilon_k - j\omega_0)^2}{[-2(\varepsilon_k)][-2(\varepsilon_k - j\omega_0)][2j\omega_0]} \Leftrightarrow \\ \|\mu_k\|_2^2 &= \frac{(\varepsilon_k + j\omega_0)}{\varepsilon_k 2(j\omega_0)} + \frac{-(\varepsilon_k - j\omega_0)}{\varepsilon_k 2(j\omega_0)} = \frac{1}{\varepsilon_k} \Leftrightarrow \\ \|\mu_k\|_2^2 &= \frac{1}{\varepsilon_k} \quad \Rightarrow \quad \gamma_k = \sqrt{\varepsilon_k}. \end{aligned}$$

Apresenta-se neste apêndice um lema básico que relaciona funções real racionais e próprias com matrizes reais cuja demonstração pode ser encontrada em (Kailath, 1980).

Lema A.1: Seja $f \in R_p$. Então existem $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que

$$(i) \quad \forall s \in \mathcal{C} \text{ tal que } \det(sI - A) \neq 0, \quad f(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d$$

$$(ii) \quad \det[b; Ab; \dots; A^{n-1}b] \neq 0 \text{ e } \det[c; A^T c; \dots; (A^T)^n c] \neq 0$$

(iii) Se $f \in S$, existem os limites

$$\int_0^\infty \exp(At)bb^T \exp(A^T t)dt = G_r(A, b) \text{ e}$$

$$\int_0^\infty \exp(A^T t)cc^T \exp(At)dt = G_0(A, c)$$

e $G_r(A, b)$ e $G_0(A, c)$ são não-singulares. ▽

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMJAN, V.M., D.Z. Arov, and M.G. Krein (1971). "Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem", *Math. USSR Sbornik*, vol. 15, pp.31-73.
- [2] ANDERSON, B. & J. Moore (1979). *Optimal Filtering*, Prentice Hall, New Jersey.
- [3] CHEN, M.J. and C.A. Desoer (1982). "Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems", *Int. J. Cont.*, vol. 35, pp.255-267.
- [4] CORRÊA, G.O. (1992). "Uma introdução à teoria de controle por retroalimentação", Minicurso, XV CNMAC.
- [5] CORRÊA, G.O., M.A. Silveira e J.C. Basílio (1991). "On the design of servomechanisms via H_2 optimization". Aceito para publicação *Int. J. of Control*.
- [6] DESOER, C.A., R.W. Liu, J. Murray, and R. Saeks (1980). "Feedback system design: the fractional representation approach", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-25, pp.399-412.
- [7] DOYLE, J.C. and G. Stein (1981). "Multivariable feedback design: concepts for a classical modern synthesis", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol.AC-26, pp.4-16.
- [8] DUREN, P.L. (1970). *Theory of H_p Spaces*, Academic Press, New York.
- [9] FRANCIS, B.A. and G. Zames (1984). "On H_∞ -optimal sensitivity theory for siso feedback systems", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-29, pp.9-16.
- [10] FRANCIS, B.A., J.W. Helton, and G.Zames (1984). " H_∞ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-29, pp.888-900.
- [11] FRANCIS, B.A. (1987). *A course on H_∞ -control theory*, Springer-Verlag, New York.
- [12] GLOVER, K. (1984). "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds", *Int. J. Cont.*, vol. 39, pp.1115-1193.

- [13] GLOVER, K. (1986). "Robust stabilization of linear multivariable systems: relations to approximation", *Int. J. Control*, vol. 43, pp.741-766.
- [14] HOFFMAN, K. (1962). *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [15] ISIDORI, A. (1985). *Nonlinear control systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York.
- [16] KAILATH, T. (1980). *Linear systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [17] KUCERA, V. & M. Sebek (1984). "A polynomial solution to regulation and tracking, part II", *Kybernetika*, vol.20, pp.257-282.
- [18] KWAKERNAAK, H. & R. Sivan. (1972). *Linear optimal control systems*, Wiley-Interscience, New York.
- [19] NEHARI, Z. (1957). "On bounded bilinear forms", *Ann. of Math.*, vol. 65, pp.153-162.
- [20] NAYLOR, A. & Sell, R. (1971). *Linear operator theory in engineering and science*, Holt, Rinehart & Winston, New York.
- [21] NETT, C.N., C.A. Jacobson, and M.J. Balas (1984). "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-29, pp.831-832.
- [22] NETT, C.N. (1985). "Algebraic aspects of linear control system stability", *IEEE Trans. Auto. Cont.*,
- [23] PARK, K. & J. Bongiorno(1989). "A general theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control system", *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 34, pp.619-626.
- [24] PARK, K. & Bongiorno, J.J. (1990). "Wiener Hopf Design of Servo-Regulator Type Multivariable Control Systems", *Int. J. Control*, V. 52, pp. 1189-126.
- [25] RUDIN, W. (1966). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- [26] SAFONOV, M.G. and M.S. Verma (1985). " L_∞ sensitivity optimization and Hankel approximation", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-30, pp.279-280.

- [26] SHAKED, V. (1976). "A general transfer-function approach to the steady-state LQG stochastic control problem", *Int. J. of Control*, 24, pp. 771-800.
- [27] SILVEIRA, M.A. & G.O. Corrêa (1992). " H_2 -optimal control of linear systems with tracking/disturbance rejection constraints", *Int. J. Control*, 5, pp.1115-1139.
- [28] VIDYASAGAR, M. (1978). *Nonlinear systems analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [29] YOULA, D.C. (1961). "On the factorization of rational matrices", *IRE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-7, pp.172-189.
- [30] VIDYASAGAR, M. (1985). *Control system Synthesis: A factorization approach*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- [31] YOULA, D.C., H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno Jr. (1976). "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part II", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-21, pp.319-338.
- [32] YOULA, D. & J. Bongiorno (1985). "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf design", *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 30, pp.652-665.
- [33] ZAMES, G. (1981). "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-23, pp.301-320.
- [34] ZAMES, G. and B.A. Francis (1983). "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-28, pp.585-601.