
O MÉTODO DO CASAMENTO DE RAÍZES APLICADO À SIMULAÇÃO DIGITAL DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Pedro da Costa Jr

José Pissolato Filho

FET/UNESP - D.E.E. BAURU - S.P.

DSCE/FEE/UNICAMP

CAIXA POSTAL - 473 C.E.P. 17001-970

CAIXA POSTAL 6101 - C.E.P. 13081-970

Resumo Este artigo apresenta uma formulação alternativa para simulação digital de transitórios eletromagnéticos em redes multi ou monofásicas. A formulação está baseada no método do Casamento de Raízes (Smith, 1977) para os elementos distribuídos (Linhas de Transmissão), na regra trapezoidal de integração (Naidu, 1985) para os elementos concentrados e em técnicas não-iterativas para tratar de elementos não-lineares (pára-raios). O método da matriz admitância nodal e fatorização triangular otimamente ordenada com técnicas de esparsidade (Zollenkopf, 1971) são empregados na solução. Dois exemplos ilustram a praticabilidade das técnicas descritas, sendo que as vantagens sobre os métodos convencionais, isto é, método das características (Dommel, 1974) para os elementos distribuídos e o método iterativo de Newton-Raphson para elementos não-lineares, são discutidas. O primeiro exemplo trata da energização de uma linha trifásica com seqüência de chaveamento. No segundo exemplo tem-se uma linha monofásica com um pára-raios em uma de suas extremidades, sujeita a um surto atmosférico. Em trabalho anterior (Costa Jr, 1990) descreve-se o método do Casamento de Raízes através de variáveis de estado porém sem a generalização do presente trabalho.

Palavras-Chave: Transitórios em Sistemas de Potência, Sobretensões, Linha de transmissão, Transformada Z, Simulação Digital.

Abstract This paper describes an alternative formulation for digital simulation of electromagnetic transients in arbitrary single- or multi phase networks. The formulation is based on the Root-matching method (Smith, 1977) for distributed parameters (Transmission Lines), on the trapezoidal rule of integration (Naidu, 1985) for lumped parameters and on non iterative techniques for non-linear elements (Surge Arresters). The nodal admittance matrix method and optimally ordered triangular factorizations with sparsity

techniques (Zollenkopf, 1971) are used in the solution. Two examples illustrate the practicality of the described method. The advantages upon the conventional methods, that is, method of characteristics (Dommel, 1974) for distributed parameters and the iterative method of Newton-Raphson for non-linear elements, are discussed. The first example deal with the energisation of a Three-phase line with sequential switching. In the second example, a mono-phase line with a surge arrester on one of its ends, is submitted to a lightning strike. On an earlier paper (Costa Jr, 1990) the Root-matching method is described through state variables but without the generality of this present paper.

Keywords: Power system transients, over voltages, power transmission, Z-transform, mathematical technique.

1. INTRODUÇÃO

Transitórios eletromagnéticos em Sistemas de Potência podem ser produzidos por falhas, surtos atmosféricos e surtos de chaveamentos. Este trabalho apresenta uma técnica de simulação alternativa que pode ser utilizada na análise de transitórios eletromagnéticos usando um microcomputador.

Técnicas desenvolvidas somente no domínio da frequência (Almeida, 1988) são incapazes de tratar elementos não-lineares e variantes no tempo, tais como pára-raios. Por outro lado, técnicas baseadas somente no domínio do tempo dependem de processos de convergência iterativa tomados para cada elemento não-linear. Este trabalho utiliza técnicas adequadas a manipulação de equações diferenciais, lineares ou não, de uma forma direta. Essas técnicas são baseadas na transformada Z. Anteriormente (Humpage, 1980) foi utilizada esse tipo de transformada na análise de transitórios, mas sob outro ponto de vista. Aqui, a simulação é desenvolvida através do casamento de dinâmica da função de transferência da equação diferença com a função de transferência da equação diferencial (Método do Casamento de Raízes). Este trabalho exemplifica a aplicação das técnicas desenvolvidas por Smith (1977) no cálculo de transitórios eletromagnéticos em um

SBA Controle & Automação /Vol. 6 nº 1/ Janeiro-Fevereiro 1995 31

* Artigo submetido em 02/02/94

1a. revisão em 18/05/94; 2a. revisão em 16/08/94;

Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. Antonio J.A. Simões Costa.

sistema trifásico e em um sistema monofásico contendo um pára-raios.

2. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO

Seja uma linha de transmissão cujos parâmetros elétricos distribuídos são l (H/km), r (Ω/km), c (F/km) e g (S/km)

Subdividindo a linha com X (km) de extensão em n trechos de comprimento $\Delta x = X/n$, cada trecho pode ser representado pelo modelo T de parâmetros concentrados (Fig.1), tal que: $L = l \Delta x$, $R = r \Delta x$, $C = c \Delta x$ e $G = g \Delta x$

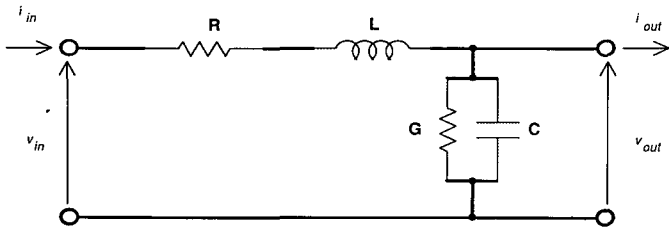


Fig.1 Trecho de Linha

Nota-se que cada trecho de linha é constituído por dois bipolos: um RL série e um CG paralelo. No item seguinte são desenvolvidas as equações de simulação para estes dois bipolos.

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DO CASAMENTO DE RAÍZES

As equações de simulação são desenvolvidas para os bipolos RL e CG através da técnica desenvolvida na referência (Costa Jr, 1989). Isto é, uma equação diferencial do tipo:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = f \quad (1)$$

pode ser resolvida através do método do Casamento de Raízes (ver apêndice), pela seguinte recorrência:

$$x_n = e^{-\Delta t/\tau} x_{n-1} + (1 - e^{-\Delta t/\tau}) f_n \quad (2)$$

3. 1. Bipolo RL

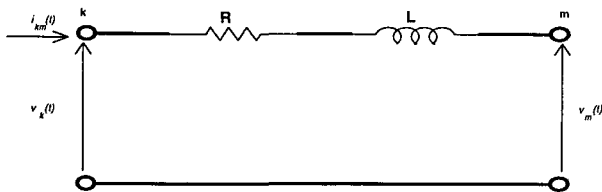


Fig.2 - Bipolo RL

Equação diferencial:

$$\frac{L}{R} \frac{d}{dt} \{i_{km}(t)\} + i_{km}(t) = \frac{v_{km}(t)}{R} \quad (3)$$

Recorrência:

$$i_{km}(n) = M_1 v_{km}(n) + I_{RL}(n-1) \quad (4)$$

com

$$I_{RL}(n-1) = M_3 v_{km}(n-1) + M_2 I_{RL}(n-2) \quad (5)$$

onde

$$M_1 = (1 - e^{-\Delta t R/L})/R \quad (6)$$

$$M_2 = e^{-\Delta t R/L} \quad (7)$$

$$M_3 = M_1 M_2 \quad (8)$$

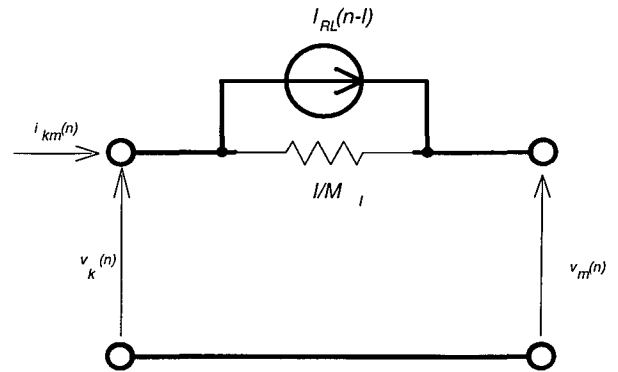


Fig.3 - Circuito Equivalente do Bipolo RL

3. 2. Bipolo CG

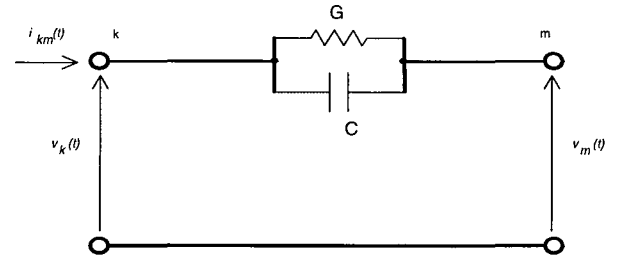


Fig.4 - Bipolo CG

Equação diferencial:

$$\frac{C}{G} \frac{d}{dt} \{v_{km}(t)\} + v_{km}(t) = \frac{i_{km}(t)}{G} \quad (9)$$

Recorrência:

$$i_{km}(n) = N_1 v_{km}(n) - I_{CG}(n-1) \quad (10)$$

com

$$I_{CG}(n-1) = N_2 v_{km}(n-1) \quad (11)$$

onde

$$N_1 = G/(1 - e^{-\Delta t C/G}) \quad (12)$$

$$N_2 = e^{-\Delta t C/G} N_1 \quad (13)$$

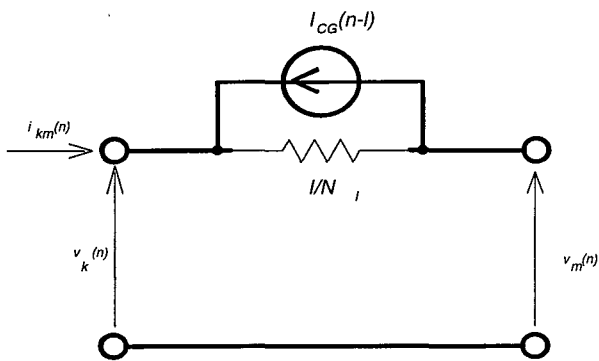


Fig.5 - Circuito Equivalente do Bipolo CG

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL

O algoritmo básico consiste em determinar o estado do sistema pela solução de um sistema linear de equações algébricas do tipo:

$$Y v(n) = i(n) - I \quad (14)$$

onde:

$v(n)$ vetor de tensões nodais determinadas a cada passo de simulação;

Y matriz condutância nodal, real e simétrica

$i(n)$ vetor de correntes nodais injetadas. Estas são as fontes de correntes ligadas entre qualquer nó e o nó de referência.

I vetor de correntes conhecidas. Estas representam a história passada da malha.

Uma vez que poucos elementos de Y são diferentes de zero, técnicas de esparsidade com eliminação ordenada de maneira ótima (Zollenkopf, 1971) são utilizadas para triangularizar Y e executar uma solução repetida a cada passo de simulação.

5. EXEMPLOS

5.3. Sistema Trifásico

A técnica apresentada neste trabalho é ilustrada usando um exemplo apresentado na literatura (Naidu, 1985).

Os dados utilizados são do sistema de transmissão em 345 kV entre Jaguara e Taquaril. Mostra-se na Fig. 6, o diagrama trifilar do sistema. A energização da linha é feita seqüencialmente, fechando-se primeiro os contatos auxiliares dos disjuntores e em seguida os contatos principais. O procedimento para calcular os transitórios de energização seqüencial da linha é feito escolhendo-se um intervalo de tempo Δt de 340 μ s.

Os elementos de resistência e indutância concentrados são tratados numericamente utilizando a regra de integração trapezoidal enquanto que a linha é representada pelo modelo de Bergeron ou através de um encadeamento de elementos concentrados (item 2).

Dados:

1) **A Fonte.** Os geradores e transformadores elevadores são representados por uma fonte de tensão trifásica atrás de um reator trifásico com acoplamento mútuo. A fonte de tensão em p.u. é:

$$E_A(t) = 0,95 \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$E_B(t) = 0,95 \cos(\omega t - \pi/6)$$

$$E_C(t) = 0,95 \cos(\omega t + 7\pi/6)$$

As indutâncias de modo zero, positivo e negativo dos geradores e transformadores são respectivamente:

$$L_0 = 0,206 H \text{ e } L_+ = L_- = 0,2642 H$$

2) **Os Disjuntores.** Os disjuntores de cada fase têm contatos auxiliares para inserir uma resistência de 400 Ω . Os instantes de fechamento dos contatos dos disjuntores são os seguintes:

Contatos Auxiliares

Fase A	8.50 ms (25. Δt)
Fase B	7.14 ms (21. Δt)
Fase C	8.16 ms (24. Δt)

Contatos Principais

Fase A	15.98 ms (47. Δt)
Fase B	14.28 ms (42 Δt)
Fase C	14.96 ms (44. Δt)

3) **O Reator de Derivação.** Encontra-se no terminal de Jaguara da linha de transmissão Jaguara- Taquaril, um reator trifásico de 440 kV, 91 MVar. A indutância de modo zero é 1,9736 H, e as indutâncias de modos positivo e negativo são 5,6420 H.

4) **A Linha de Transmissão.** A linha de transmissão de 400 km tem, na frequência de 60 Hz, os seguintes parâmetros elétricos:

Resistência de Seq. (0)	0.32183 Ω /km
Resistência de Seq. (+)	0.03419 Ω /km
Indutância de Seq. (0)	3.36000 mH/km
Indutância de Seq. (+)	0.99413 mH/km
Capacitância de Seq.(0)	0.00800 mF/km
Capacitância de Seq.(+)	0.01180 mF/km
Condutância de Seq. (0)	0.55600 mS/km
Condutância de Seq. (+)	0.55600 mS/km

Nos cálculos pelo método de Bergeron, a resistência série da linha é concentrada no terminal de Jaguara (128,73 Ω para o modo zero e 13.676 Ω para os modos positivo e negativo).

Pode-se concluir que as impedâncias de surto são 648 Ω para o modo zero, e 290 Ω para os modos positivo e negativo. Os tempos de trânsito são 2,04 ms (6. Δt) para o modo zero e 1.36 ms (4. Δt) para os modos positivo e negativo.

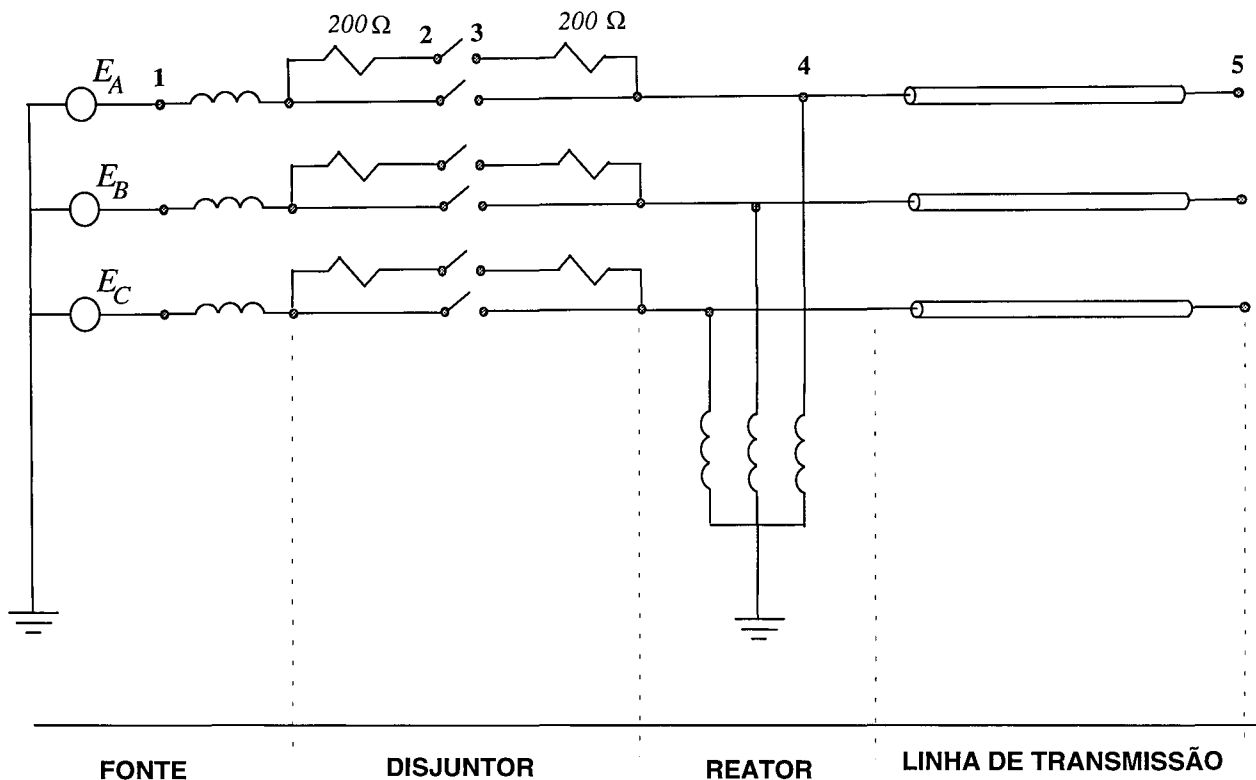


Fig.6 - Sistema de Transmissão Jaguar-Taquaril

A linha de transmissão é considerada perfeitamente transposta. Todo o procedimento de cálculo é baseado em matrizes de transformação modal.

No método de casamento de raízes, a linha é dividida em 40 trechos iguais de 10 km cada.

As figuras 7, 8 e 9 mostram os resultados das simulações. As curvas tracejadas foram obtidas através do método das características. As curvas cheias correspondem a aplicação do método do Casamento de Raízes. As oscilações observadas no método das características ocorrem devido à presença de resistores dispostos nas extremidades da linha, os quais aproximam as perdas distribuídas. Este fenômeno tende a diminuir com o uso de segmentação da linha.

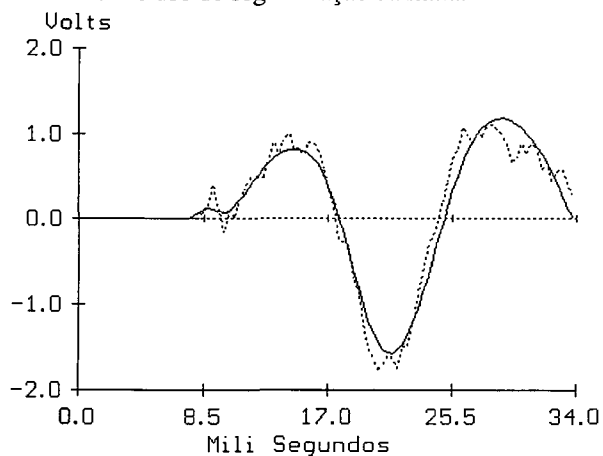


Fig.7 - Tensão na Fase A no terminal Receptor

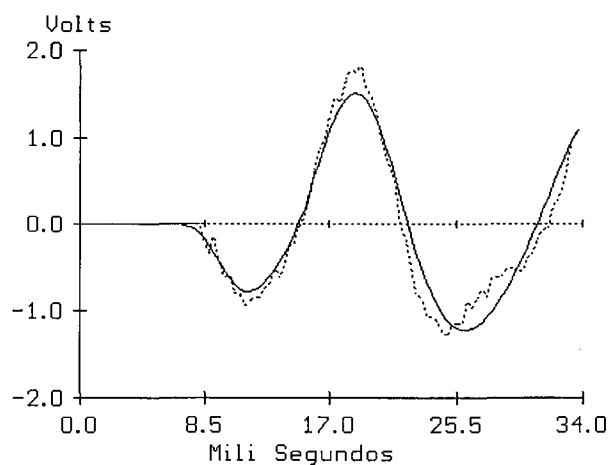


Fig.8 - Tensão na Fase B no terminal Receptor

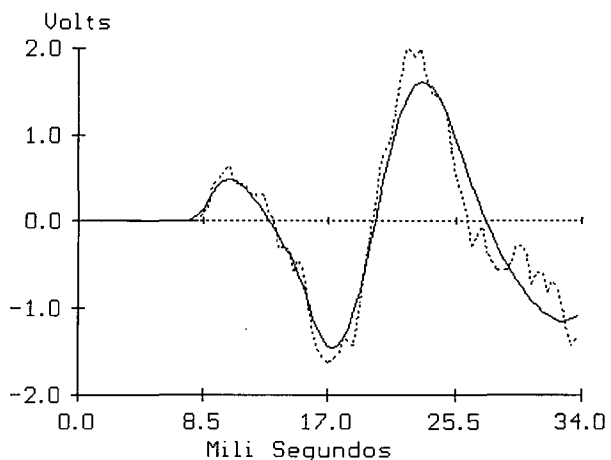


Fig.9 - Tensão na Fase C no terminal Receptor

5. 4. Sistema Monofásico

5.4.1. Modelo do Pára-Raios

Seja o dispositivo de proteção localizado no extremo de uma linha (Fig.10):

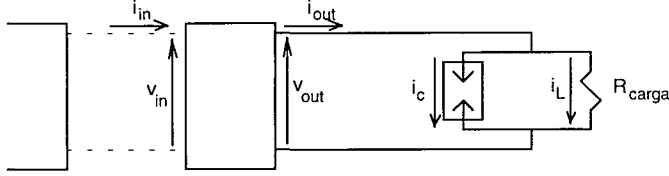


Fig.10 - Pára-raios em uma extremidade da linha.

A dinâmica do pára-raios pode ser expressa da seguinte forma (Greenwood, 1971):

$$\begin{cases} \text{se } v_{out} < v_d, \text{ então } i_c = 0 \\ \text{se } v_{out} \geq v_d \text{ e } i_c > i_{min}, \text{ então } i_c = \frac{v_{out}^5}{R_0 v_d^4} \end{cases} \quad (15)$$

onde

v_d Tensão de disparo do pára-raios

i_c Corrente do pára-raios

i_{min} Corrente mínima de manutenção de arco

R_0 Resistência inicial de arco do pára-raios.

Para o último trecho da linha tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{C}{G} \frac{d v_{out}}{dt} + v_{out} = \frac{i_{in} - i_{out}}{G} \quad (16)$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} \text{se } i_c = 0, \text{ então } i_{out} = i_L \\ \text{se } i_c \neq 0, \text{ então } i_{out} = i_L + \frac{v_{out}^5}{R_0 v_d^4} \end{cases} \quad (17)$$

Substituindo a equação (17) na equação (16), tem-se:

$$\frac{d v_{out}}{dt} = -\frac{G}{C} v_{out} - \frac{v_{out}^5}{C R_0 v_d^4} + \frac{i_{in} - i_L}{C} \quad (18)$$

ou ainda:

$$\frac{d v_{out}}{dt} = S_1 v_{out} - S_2 v_{out}^5 + f(t) \quad (19)$$

onde:

$$S_1 = -\frac{G}{C} \quad (20)$$

$$S_2 = \frac{1}{C R_0 v_d^4} \quad (21)$$

$$f(t) = \frac{i_{in} - i_L}{C} \quad (22)$$

A equação de simulação do pára-raios pode ser obtida pela técnica apresentada na referência (Smith, 1977), isto é, a seguinte equação diferencial não-linear:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = J \frac{d x}{d t} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (23)$$

pode se resolvida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$x_n = x_{n-1} + J_{n-1}^{-1} (e^{J_{n-1} \Delta t} - 1) \dot{x}_{n-1} + J_{n-1}^{-2} (e^{J_{n-1} \Delta t} - \Delta t J_{n-1} - 1) \dot{f}_{n-1} \quad (24)$$

onde J - Jacobiano

Desta forma, a equação (19) é resolvida pela recorrência acima fazendo-se as seguintes substituições:

$$x = v_{out} \quad (25)$$

$$J_{n-1} = S_1 + 5 S_2 x^4 \quad (26)$$

$$\dot{x}_{n-1} = S_1 x_{n-1} + S_2 x_{n-1}^5 + f_{n-1} \quad (27)$$

$$f_{n-1} = \frac{(i_{in})_{n-1} - (i_L)_{n-1}}{C} \quad (28)$$

$$\dot{f}_{n-1} = \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{\Delta t} \quad (29)$$

5.4.2. Exemplo

A técnica apresentada neste trabalho é ilustrada usando um exemplo, no qual um surto atmosférico ocorre à 20 km do ponto onde está situado o pára-raios. A linha, cuja classe é de 380 kV, tem os seguintes parâmetros $r = 0,04 \Omega / Km$, $g = 0,556 mS / Km$, $l = 1,01 mH / Km$ e $c = 11,86 nF / Km$. O pára-raios protege um transformador o qual é modelado por uma capacitância para terra de 6 nF. A descarga atmosférica é modelada por uma fonte de tensão, com uma frente de onda de 1.2 μs e tempo de meio-valor de 50 μs , e tem amplitude de 2 MV. O pára-raios tem os seguintes parâmetros: $V_d = 400 kV$ e $R = 15 \Omega$. O Duas simulações são executadas para ilustrar a técnica apresentada.

A linha de transmissão é dividida em 50 trechos e o passo de simulação de 0,20 μs é empregado. O sistema exemplo é primeiramente simulado sem o pára-raios. Os resultados estão mostrados na Fig.11. Uma segunda simulação é executada com o pára-raios inserido. Os resultados obtidos através das técnicas direta (item 5.2.1) e iterativa (Newton Raphson) são mostrados na Fig.12

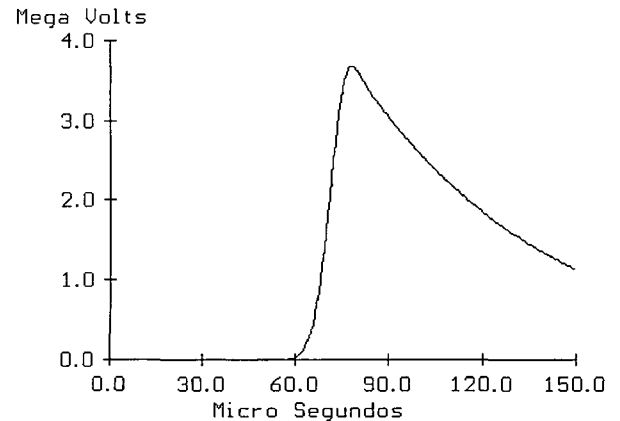


Fig.11 - Tensão nos terminais do transformador sem pára-raios.

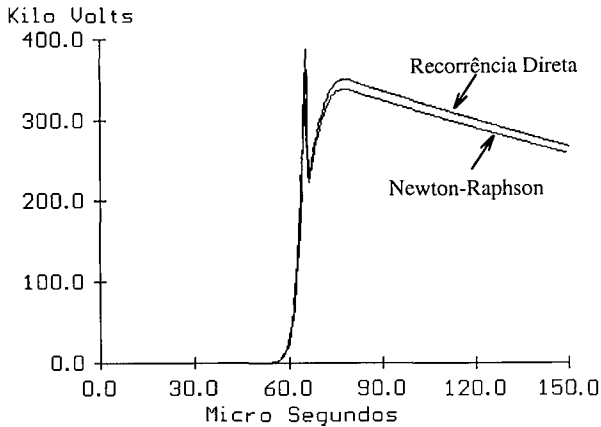


Fig.12 - Tensão nos terminais do transformador com pára-raios.

6. CONCLUSÕES

A técnica alternativa descrita neste trabalho, apresentou as seguintes características:

- estabilidade intrínseca;
- alta precisão, sendo excelente para respostas transitórias;
- tem características de estabilidade global que casam com aquelas do sistema sendo simulado e são ideais para simulações de projeto;
- é ideal para implementação em micro-computadores.

A comparação do método deste trabalho com o método de Bergeron validou o uso do casamento de raízes em análises de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos trifásicos.

É importante observar que a técnica apresentada permite um monitoramento da tensão ao longo de toda a extensão da linha, sendo melhor aplicável, desta forma, em estudos sobre perda distribuída devido ao efeito corona.

Em futuros trabalhos será necessário encontrar uma técnica satisfatória para representar a dependência dos parâmetros da linha com a frequência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, M.G.** (1988) "A Linha de Assinantes na Rede Digital de Serviços Integrados: Modelamento e Simulação", Dissertação de Mestrado, UNICAMP.
- Costa Jr., P.** (1989), "Método do Casamento de Raízes Aplicado à Simulação Digital de Sobreensões em Linhas de Assinantes", Dissertação de Mestrado, UNICAMP.
- Costa Jr., P.** (1990) "Técnica de Simulação Alternativa na Análise de Transitórios Eletromagnéticos", 8º Congresso Brasileiro de Automática, Belém - PA, pp.524- 529.
- Dommel, H.W. and Meyer, S.W.** (1974) "Computation of Electromagnetic transients", *Proc. of IEEE*, vol. 62 n- 7, pp. 983-993.
- Greenwood, A.** (1971), "Electrical Transients in Power Systems", Wiley-Interscience.
- Humpage, W.D., Wong, K.P., Nguyen, T.T. and Sutato, D.** (1980), "Z-transform Transient Analysis in Power

Systems", *IEEE Proc. C, Gener. Trans. & Distrib.*, 127, 370-378.

Naidu, S.R. (1985), "Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência, Ed. Grafset Ltda, 1985

Smith, J.M. (1977), "Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists", John Wiley & Sons.

Zollenkopf, K., (1971), "Bi- Factorization Basic Computational Algorithm and Programming Techniques", *Proc. of the Oxford Conference on the Institute of Mathematics and Its Applications*, Academic Press, 1971, pp. 75-96.

APÊNDICE

Método do Casamento de Raízes

Algoritmo para obtenção da equação (2):

1) Determinação da função de transferência do sistema a ser simulado usando a Transformada de Laplace:

Ex.: No domínio do tempo, tem-se

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = f, \quad \text{para } x(0) = 0 \quad (30)$$

No domínio da frequência:

$$\tau s x + x = f \quad (31)$$

ou

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (32)$$

2) Determinação dos pólos e zeros da função de transferência obtida no item anterior,

$$s_{\text{pólo}} = -\frac{1}{\tau} \quad (33)$$

3) Mapeamento dos pólos e zeros do plano s para o plano z :

$$z_{\text{pólo}} = e^{s_{\text{pólo}} \Delta t} \quad \text{e} \quad z_{\text{zero}} = e^{s_{\text{zero}} \Delta t} \quad (34)$$

onde Δt é o passo de simulação. Logo,

$$z_{\text{pólo}} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad (35)$$

4) Formação da função de transferência polinomial em z com os pólos e zeros determinados no item anterior:

$$\frac{1}{z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} = \frac{p}{q} \quad (36)$$

5) Determinação do valor final da resposta ao degrau unitário do sistema contínuo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left(\frac{1}{\tau s + 1} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right\} = 1 \quad (37)$$

6) Determinação do valor final da resposta ao degrau unitário do sistema discreto:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \right) \left(\frac{z}{z-1} \right) \right\} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \quad (38)$$

7) Casamento do valor final do sistema discreto com o valor final do sistema contínuo pela introdução de uma constante na função de transferência determinada no item a4.

$$\frac{x}{f} \approx K \frac{p}{q} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \quad (39)$$

Casando os valores finais:

$$\frac{K}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} = 1 \quad (40)$$

ou,

$$K = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad (41)$$

Assim,

$$\frac{x}{f} \approx \frac{K}{z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}{z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \quad (42)$$

8) Adição de zeros à função de transferência do sistema discreto até que a ordem do denominador case com a ordem do numerador:

$$\frac{x}{f} \approx \frac{z \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right)}{z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}} \quad (43)$$

9) Aplicação da transformada inversa em z na função desenvolvida no item anterior na forma de equação diferença de simulação:

$$x \left(z - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) = f z \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) \quad (44)$$

ou

$$x - z^{-1} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} x = f \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) \quad (45)$$

Tomando a transformada inversa, obtém-se a equação (2):

$$x_n = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} x_{n-1} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) f_n \quad (46)$$