
ESTRUTURA DIGITAL DE SEGUNDA ORDEM QUASE ÓTIMA LIVRE DE CICLOS LIMITE

Mário Sarcinelli Filho*, Charles Perim da Cruz*, Ana Cristina Staut Simmer* e
Paulo Sérgio Ramirez Diniz**

* Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Espírito Santo
Caixa Postal 01-9011 CEP: 29060-970 Vitória-ES
Tel.: (027) 335-2644 Fax: (027) 335-2650
E-mail: SARCINEL@ELE.UFES.BR

** Programa de Engenharia Elétrica-COPPE/UFRJ
Caixa Postal 68504 CEP: 21945 Rio de Janeiro - RJ

RESUMO: Este trabalho apresenta uma nova estrutura digital, derivada da rede ótima de segunda ordem, porém imune a ciclos limite devidos a entrada constante. O projeto de tal estrutura é abordado, e sua utilização como bloco básico para a implementação de filtros digitais nas formas cascata e paralela é proposta. Adicionalmente, é apresentado como exemplo um filtro digital passa-baixas elíptico de oitava ordem, implementado na forma paralela, para o qual a variância relativa do ruído de quantização na saída é calculada, considerando vários valores de largura da banda passante. Além da estrutura aqui proposta são simulados dois outros blocos básicos de implementação, já conhecidos na literatura, com a finalidade de comparar o desempenho das três estruturas consideradas. Com base em tal exemplo pode-se verificar que a variância relativa do ruído na saída do filtro baseado na estrutura aqui proposta é a que mais se aproxima daquela correspondente ao filtro baseado na estrutura ótima. Tal resultado é que nos levou a atribuir a designação quase ótima para a estrutura aqui proposta.

ABSTRACT: This paper presents a new constant-input limit cycle-free second order digital-filter structure which is derived from the well known minimum roundoff noise second-order structure. The problem of designing this structure is addressed and its suitability as a building block

for cascade and parallel designs is pointed out. An elliptic 8th-order low-pass example is given, showing the relative output roundoff noise variance for the parallel form implementation, for varying passband edge frequencies, regarding the proposed building block and two other known low roundoff noise building blocks. The filter is then simulated, regarding the three above building blocks, for the sake of roundoff noise performance comparison. For the filter based on the proposed building block the relative output roundoff noise variance is the closest to that for the filter implemented using the minimum roundoff noise building block. This is a major feature, and allows the proposed structure to be labeled as a near-optimal structure.

1. INTRODUÇÃO

Algumas estruturas de segunda ordem têm sido propostas para a realização de filtros digitais em forma cascata ou paralela (Jackson *et alii*, 1979; Diniz e Antoniou, 1986), as quais garantem um desempenho, ao nível do ruído de quantização na saída do filtro, próximo do desempenho ótimo caracterizado por Mullis & Roberts (1976), mas com reduzida complexidade computacional. Tais estruturas são descritas no espaço de estados pelas equações

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[k] + \mathbf{B}u[k] \quad (1a)$$

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{X}[k] + du[k] \quad (1b)$$

submetido 17/12/93

1a.revisão 11/03/94; 2a.revisão 21/10/94

Aceito por recomendação do Ed.Cons.Prof.Dr.Rafael Santos Mendes

onde $\mathbf{X}[k]$ é o vetor 2×1 das variáveis de estado, $u[k]$ é o sinal de entrada da rede (escalar) e $y[k]$ é o sinal de saída da rede (escalar). O conjunto $\{A, B, C, d\}$ de parâmetros representa a realização da estrutura, sendo A, B e C matrizes de dimensão $2 \times 2, 2 \times 1$ e 1×2 , respectivamente, e d um escalar.

Jackson *et alii* (1979) propuseram uma síntese para a estrutura de segunda ordem com mínimo ruído de quantização na saída, a qual está mostrada na Figura 1. Quando as variáveis de estado são quantizadas por truncamento em magnitude, ou seja

$$|Q[v]| \leq |v| \quad (2)$$

onde $Q[v]$ é o valor quantizado de v , tal estrutura de segunda ordem é imune a ciclos limite no caso de entrada zero (Meerkotter, 1976; Mills *et alii* 1978), o que garante sua imunidade também a ciclos limite em caso de *overflow*, se a saturação aritmética, por exemplo, for utilizada Claasen *et alii* (1975).

Diniz e Antoniou (1986) propuseram uma outra estrutura de segunda ordem, imune a ciclos limite nos casos de entrada zero, de *overflow* e de entrada constante. Tal estrutura está representada na Figura 2, também no caso em que a quantização é feita por truncamento em magnitude, no caso granular, e por saturação aritmética, no caso de *overflow*. Isto garante a inexistência de ciclos limite nos casos de entrada zero e de *overflow* (Diniz e Antoniou, 1986). Por sua vez, a imunidade a ciclos limite no caso de entrada constante é garantida pela modificação feita na forma como o sinal de entrada é injetado na estrutura: o vetor B agora é dado por

$$B = (I-A)P \quad (3)$$

sendo P tal que Pu_0 é representável exatamente no comprimento de palavra desejado, para um sinal constante de entrada u_0 . A estrutura proposta em Diniz e Antoniou (1986) utiliza

$$P = [1 \ 0]^T \quad (4)$$

o que leva a

$$B = [1 - a_{11} \ -a_{21}]^T \quad (5)$$

Observe-se que tal vetor B é realizado sem nenhum novo multiplicador, o que reduz a complexidade computacional da estrutura. Porém, a condição de mínimo ruído de quantização na saída (Jackson *et alii*, 1979) é perdida, e tal estrutura apresenta um acréscimo na variância do ruído em relação à estrutura de mínimo ruído (Diniz e Antoniou, 1986). Finalmente, dado que Pu_0 deve ser realizado exatamente, o escalamento da rede é feito utilizando-se um multiplicador λ colocado na entrada da rede, sendo necessário mais um quantizador para $\lambda u[k]$, como mostra a Figura 2.

Ainda considerando as Figuras 1 e 2, pode-se notar que, na obtenção das amostras $y[k]$ na saída das estruturas, usa-se somadores de precisão dupla, com a quantização do resultado feita após a soma. Isso se justifica pois os somadores de precisão dupla já são usados para a quantização nas variáveis de estado. Daqui para a frente, resalte-se, somente o caso de somadores de dupla precisão será considerado.

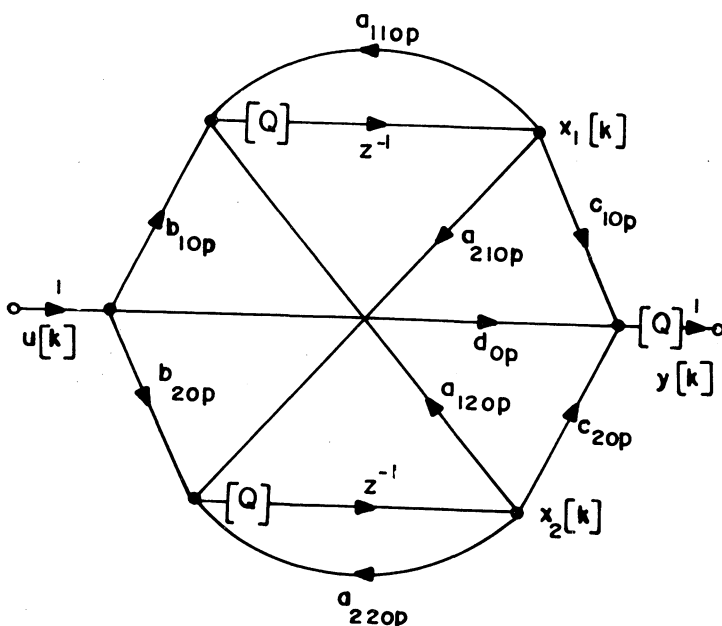


Figura 1 - Estrutura de mínimo ruído

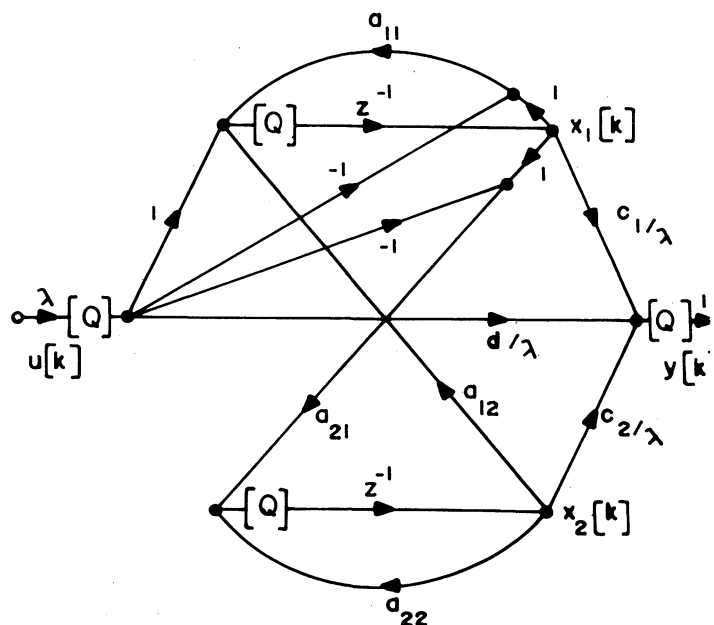


Figura 2 -Estrutura sem ciclos limite (Diniz & Antoniou,1986)

Um outro procedimento geral para eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante em qualquer rede representada no espaço de estados foi proposto recentemente (Kauramata & Higuchi, 1983). Tal procedimento também consiste em alterar a forma como o sinal $u[k]$ de entrada é inserido na rede, e difere daquele proposto em Diniz e Antoniou (1986) pelo fato de que nenhuma restrição adicional àquela representada pela equação (3) é imposta ao vetor \mathbf{P} . No presente trabalho tal técnica de eliminação de ciclos limite devidos à entrada constante será aplicada à estrutura de segunda ordem com mínimo ruído de quantização (Jackson *et alii*, 1979), de forma a obter uma nova estrutura de segunda ordem, imune a ciclos limite no caso de entrada constante. Mais uma vez a quantização das variáveis de estado será feita usando o truncamento em magnitude e a saturação aritmética.

2. A ESTRUTURA PROPOSTA

Para a estrutura ótima da Figura 1, a descrição no espaço de estados é caracterizada por

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[k] + \mathbf{B}_{op}u[k]] \quad (6a)$$

$$y[k] = \mathbf{Q}[\mathbf{C}_{op}\mathbf{X}[k] + d_{op}u[k]] \quad (6b)$$

onde, para o caso em que a estrutura de segunda ordem realiza um par de pólos complexos conjugados, a diagonal principal de \mathbf{A}_{op} é formada pela parte real dos pólos e sua diagonal secundária é formada pela parte imaginária dos pólos. Adicionalmente, \mathbf{B}_{op} e \mathbf{C}_{op} são tais que

$$b_{1op}c_{1op} = b_{2op}c_{2op} \quad (6c)$$

Após isso, a estrutura é escalada de forma que as normas quadráticas das transferências da entrada da rede para as variáveis de estado, dadas por $F_1(z) = X_1(z)/U(z)$ e $F_2(z) = X_2(z)/U(z)$ (onde $U(z)$ é a transformada Z de $u[k]$ e $X_1(z)$ e $X_2(z)$ são as transformadas Z das variáveis de estado $x_1[k]$ e $x_2[k]$, respectivamente), sejam ambas unitárias. Isso conclui o processo de síntese da rede ótima (Jackson *et alii*, 1979).

A aplicação da técnica proposta em Kauramata & Higuchi (1983) à estrutura da Figura 1 gera a estrutura mostrada na Figura 3. Observe-se que o valor $\mathbf{P}u[k]$, na Figura 3, também é quantizado, o que será justificado mais adiante. Para tal figura, a descrição no espaço de estados é dada por

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[k] + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})\mathbf{Q}[\mathbf{P}u[k]]] \quad (7a)$$

$$y[k] = \mathbf{Q}[\mathbf{C}_{op}\mathbf{X}[k] + d_{op}u[k] - \mathbf{C}_{op}\mathbf{Q}[\mathbf{P}u[k]]] \quad (7b)$$

Sendo que se for imposto que

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{op})^{-1}\mathbf{B}_{op} \quad (8a)$$

e que

$$d = d_{op} - \mathbf{C}_{op}\mathbf{P} \quad (8b)$$

a função de transferência $H(z)$ realizada com a Figura 3 é a mesma realizada com a Figura 1, quando da implementação em precisão infinita.

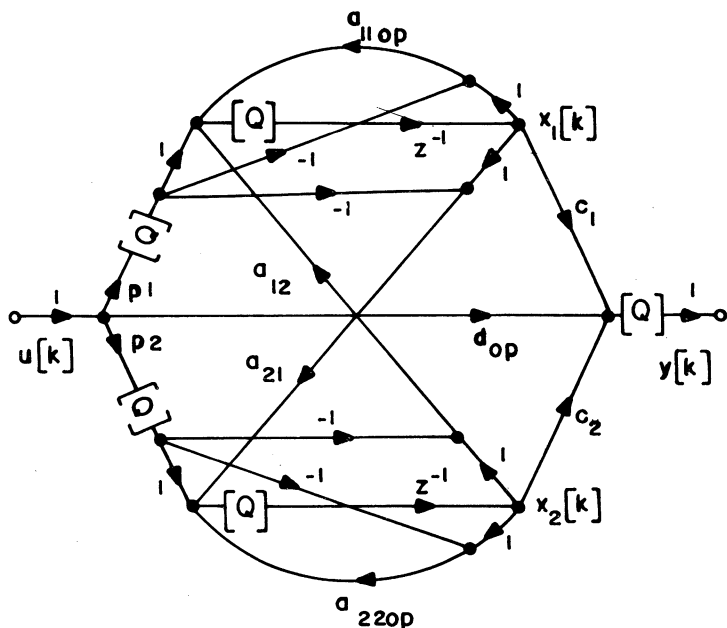


Figura 4 -Estrutura sem ciclos limite genérica

Assim sendo, a estrutura da Figura 3 pode ser vista como sendo uma versão imune a ciclos limite devidos à entrada constante da rede ótima de segunda ordem proposta em Jackson *et alii* (1979). Entretanto, para evitar a necessidade de correção do coeficiente que estabelece a ligação direta entrada/saída, a rede da Figura 3 pode ser ligeiramente modificada, como mostrado na Figura 4. Agora, a descrição no espaço de estados torna-se

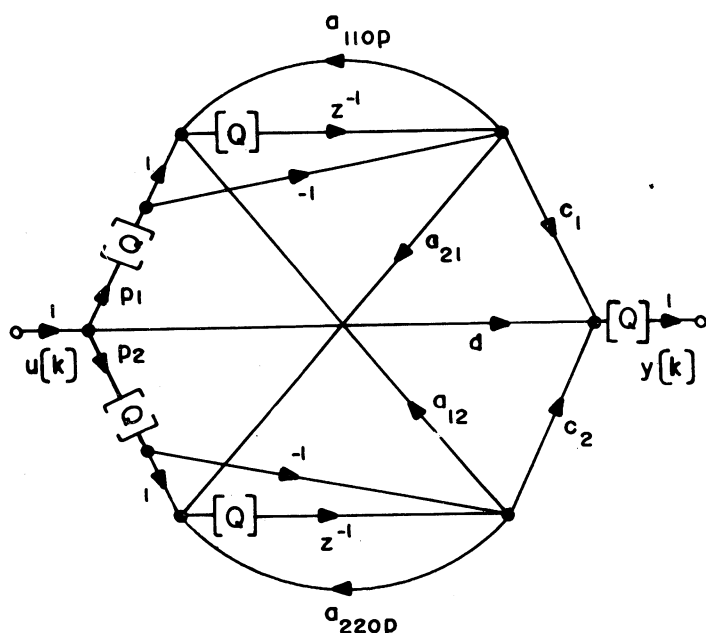


Figura 3 - Estrutura Quase Ótima Proposta

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[k] + (\mathbf{I}-\mathbf{A}_{op})\mathbf{Q}[\mathbf{P}u[k]]] \quad (9a)$$

$$y[k] = \mathbf{Q}[\mathbf{C}_{op}\mathbf{X}[k] + d_{op}u[k]] \quad (9b)$$

Ressalte-se que, dada a rede da Figura 1 já escalada, para sintetizar a rede da Figura 4 é necessário apenas calcular \mathbf{P} como em (8a), além de re-escalar a rede tal que não haja overflow nos nós de soma correspondentes a

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{op})\mathbf{Q}[\mathbf{P}u[k]].$$

Daqui para a frente, portanto, a estrutura da Figura 4, e não mais a da Figura 3, será considerada, pela sua maior similaridade com a estrutura da Figura 1, já que o coeficiente d também é mantido inalterado.

Dado que a estrutura recursiva da Figura 4 é a mesma da Figura 1, a menos de escalamento, ou seja, as matrizes \mathbf{A} correspondentes são similares, a sua imunidade a ciclos limite no caso de entrada zero está garantida (Vaidyanathan & Liu, 1987). A mesma afirmação vale para o caso de ciclos limite devidos a overflow (Claassen *et alii*, 1975).

Seja, agora, a entrada constante $u[k] = u_0$. Agora, o comportamento dinâmico dos estados é descrito por

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[k] + (\mathbf{I}-\mathbf{A}_{op})\mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0]] \quad (10)$$

Daí obtém-se que

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}\mathbf{X}[k] - \mathbf{A}_{op}\mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0] + \mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0]] \quad (11)$$

e finalmente que

$$\mathbf{X}[k+1] - \mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0] = \mathbf{Q}[\mathbf{A}_{op}(\mathbf{X}[k] - \mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0])] \quad (12)$$

que corresponde à descrição da estrutura ótima, no caso de entrada zero, com novos estados dados por

$$\mathbf{V}[k] = \mathbf{X}[k] - \mathbf{Q}[\mathbf{P}u_0] \quad (13)$$

para a qual a imunidade a ciclos limite está garantida. Assim sendo, a estrutura proposta na Figura 4 é imune também a ciclos limite no caso de entrada constante. Adicionalmente, ela se aproxima bastante da rede ótima proposta em Jackson *et alii* (1979), como se pode ver pelos parâmetros \mathbf{A}_{op} , \mathbf{C}_{op} e d_{op} , que são mantidos como em (6), o que cria a expectativa de que ela também apresente baixo ruído de quantização na saída.

Finalmente, observe-se que a presença dos quantizadores logo após o produto $\mathbf{P}u[k]$ é necessária para garantir a passagem da equação (11) para a equação (12), e equivale à exigência de que $\mathbf{P}u_0$ seja representado exatamente, no caso da estrutura proposta em Diniz e Antoniou (1986). A diferença é que agora os parâmetros \mathbf{A}_{op} , \mathbf{C}_{op} e d_{op} são mantidos, o que

Tabela 1 Hardware para implementação de um filtro cascata de N blocos.

Figura	Somadores de 2 entradas	Multiplicadores genéricos	Quantizadores
1	6N	9N	3N
2	7N	7N + 1	3N + 1
4	10N	9N	5N

não ocorre com a estrutura da Figura 2.

Tabela 2 Hardware para implementação de um filtro paralelo de N blocos.

Figura	Somadores de 2 entradas	Multiplicadores genéricos	Quantizadores
1	6N	8N + 1	2N + 1
2	7N	7N + 1	3N + 1
4	10N	8N + 1	4N + 1

3. PROJETO DA ESTRUTURA QUASE ÓTIMA

Uma vez sintetizada a estrutura ótima da Figura 1, devidamente escalada (Jackson *et alii*, 1979), a síntese da nova estrutura pode ser feita de imediato: o vetor \mathbf{P} é calculado através da equação (8a), e a estrutura resultante é novamente escalada, através de uma transformação de similaridade descrita pela matriz

$$\mathbf{T} = \text{Diag}(\|F_a(z)\|_p, \|F_b(z)\|_p) \quad (14)$$

onde $F_a(z)$ e $F_b(z)$ são as transferências da entrada da rede para os nós correspondentes a $x_1[k] - \mathbf{Q}[p_1u[k]]$ e $x_2[k] - \mathbf{Q}[p_2u[k]]$, respectivamente. As normas quadráticas de $F_a(z)$ e $F_b(z)$ podem ser calculadas através do método proposto em Mitra *et alii* (1974), quando for o caso de escalamento em norma $p = 2$. Já para o caso de escalamento em norma $p = \infty$, o cálculo da norma infinita de $F_a(z)$ e de $F_b(z)$ pode ser realizado como proposto em Sarcinelli Fo. *et alii* (1992).

Para determinar o ruído de quantização na saída da estrutura da Figura 4 as transferências necessárias são $G_1(z)$ e $G_2(z)$ (definidas como as transferências dos nós correspondentes a $x_1[k+1]$ e $x_2[k+1]$ para a saída da rede), além das transferências $L_1(z)$ e $L_2(z)$ (definidas como as transferências dos nós de saída dos multiplicadores p_1 e p_2 para a saída da rede). A variância relativa do ruído na saída da estrutura da Figura 4 é, então, dada por

$$\sigma_o^2/\sigma_e^2 = 10 \log \left\{ 1 + \sum_1^2 \left(\|G_i(z)\|_2^2 + \|L_i(z)\|_2^2 \right) \right\} \quad (15)$$

onde as normas quadráticas são novamente calculadas como em Mitra *et alii* (1974).

Do ponto de vista de hardware, a estrutura da Figura 4 difere daquela da Figura 1 pela necessidade de dois quantizadores para o produto $\mathbf{P}u[k]$. Isso aumenta o ruído na saída da rede, como caracterizado por $L_1(z)$ e $L_2(z)$ na equação (15). Já quando comparada com a estrutura da Figura 2, a estrutura aqui proposta possui mais quantizadores e mais multiplicadores. São eles os dois quantizadores na saída dos multiplicadores p_1 e p_2 e esses dois multiplicadores. Porém, a estrutura da Figura 2 tem o multiplicador adicional λ , e conseqüentemente um quantizador adicional para o produto $\lambda u[k]$, em cada seção do filtro na forma paralela, embora quando tal bloco é usado como seção de uma estrutura cascata ou paralela um único λ seja usado. Tal comparação fica clara a partir do hardware necessário para implementar

uma estrutura cascata de N blocos como os das Figuras 1, 2 e 4, indicado na Tabela 1, e daquele necessário para implementar uma estrutura paralela com N blocos como os das Figuras 1, 2 e 4, que está na Tabela 2.

4. EXEMPLO

Para efeito de avaliação do desempenho da estrutura da Figura 4, em comparação com as estruturas das Figuras 1 e 2, as três são usadas para implementar um filtro elíptico passa-baixas na forma paralela, e a variância relativa do ruído na saída do filtro assim realizado é computada, para diversas larguras da banda passante em cada caso. Também são usados dois critérios diferentes para escalamento do filtro. O filtro utilizado tem a seguinte especificação inicial:

Largura da banda passante: $f_p = 100\text{Hz}$
 Início da banda de rejeição: $f_r = 120\text{Hz}$
 Atenuação máxima na banda passante: 0,25dB
 Atenuação mínima na banda de rejeição: 65dB
 Frequência de amostragem: 10.000Hz
 Ordem: 8

Para a avaliação comparativa dos desempenhos a largura da banda passante do filtro é variada de 100Hz a 1500Hz, usando a transformação passa-baixas passa-baixas de Constantinides (1970), e a variância relativa do ruído na saída do filtro é plotada contra a largura relativa ω_p/ω_s da banda passante. A Figura 5 traz o resultado para o caso de escalamento em norma quadrática, enquanto a Figura 6 traz o caso em que o filtro é primeiro escalado em norma quadrática e depois re-escalado, agora usando norma infinita. Tal escalamento duplo faz com que a variância relativa do ruído na saída da estrutura de segunda ordem da Figura 1, que é ótima apenas no caso de escalamento em norma quadrática (Jackson *et alii*, 1979; Mullis & Roberts, 1976), torne-se mais próxima do valor mínimo para o caso de escalamento em norma infinita (Bomar, 1989), e por isso é aqui adotado.

Uma análise das Figuras 5 e 6 mostra alguns fatores dignos de nota: o primeiro deles é que a eliminação de ciclos limite no caso de entrada constante é feita à custa da elevação do ruído na saída do filtro (Sarcinelli Fo., 1990), como se percebe nos casos das estruturas das Figuras 2 e 4. Outro fato notável é que o desempenho do filtro usando a estrutura da Figura 2 equivale àquele do filtro usando a estrutura da Figura 1, quando o escalamento usa as normas quadrática e infinita superpostas, o que está de acordo com os resultados apresentados em Diniz e Antoniou (1986). Observe-se, também, que o desempenho do filtro usando a estrutura da Figura 1 piora sensivelmente, sob tal condição de escalamento. Isto se deve ao fato de que as condições de mínimo ruído (Jackson *et alii*, 1979; Mullis & Roberts, 1976) não são mais atendidas.

Ainda analisando a Figura 6, vê-se que o desempenho do filtro usando as estruturas das Figuras 2 e 4 se equivale, sob as condições de escalamento duplo usando norma quadrática e infinita, com vantagem para a estrutura da Figura 2, que usa menos multiplicadores (Diniz e Antoniou, 1986). Já no caso de escalamento em norma quadrática o filtro que usa a estrutura da Figura 4 tem melhor desempenho, apesar de exigir um pouco mais de hardware para sua implementação, principalmente em se tratando de filtros de banda estreita,

quando a utilização de tal estrutura é então recomendável. A destacar o fato de que as estruturas das Figuras 2 e 4 são imunes a ciclos limite sob condição de entrada constante, o que não ocorre com a estrutura da Figura 1.

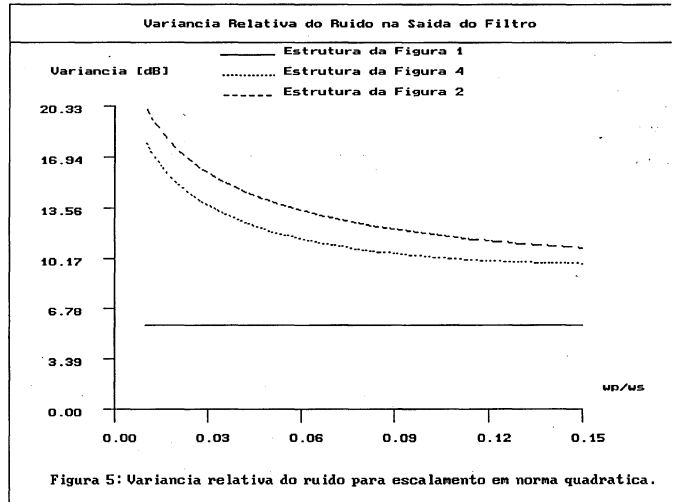


Figura 5 - Variância relativa do ruído para escalamento em norma quadrática.

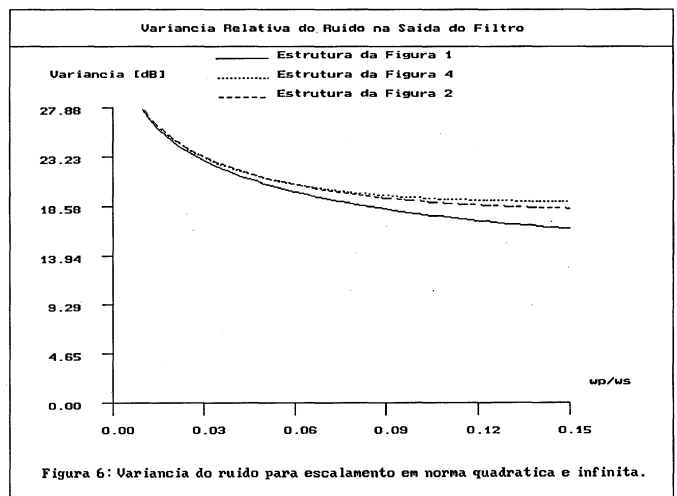


Figura 6 - Variância relativa do ruído para escalamento em norma quadrática e infinita.

5. CONCLUSÕES

Uma estrutura de segunda ordem imune a ciclos limite nos casos de entrada zero, entrada constante e overflow é apresentada, a qual é derivada da estrutura de segunda ordem com mínimo ruído de quantização (Jackson *et alii*, 1979). Por ser derivada de tal estrutura, um baixo nível de ruído de quantização na saída é esperado. Para confirmar tal expectativa, um filtro passa-baixas na forma paralela é projetado para diversas formas de escalamento, usando a estrutura proposta, a estrutura de mínimo ruído em Jackson *et alii* (1979) e a estrutura sem ciclos limite em Diniz e Antoniou (1986) como blocos básicos. Os resultados simulados confirmam que a estrutura proposta apresenta baixo ruído de quantização na saída, principalmente para o caso de filtros de banda estreita escalados em norma quadrática. Em tal situação, a variância relativa do ruído na saída da nova estrutura é a que mais se aproxima daquela da

estrutura ótima, razão pela qual a nova estrutura proposta foi designada "quase ótima".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bomar, B. W., (1989). On the Design of Second-Order State-Space Digital Filter Sections, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 36:542-552.
- Claasen, T. A. C. M., W.F. Mecklenbrauker & J.B. Peek, (1975). On the Stability of the Forced Response of Digital Filters with Overflow Nonlinearities, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-22:292-296.
- Constantinides, A. G., (1970). Spectral Transformations for Digital Filters, *IEEE Proceedings*, vol. 117:1585-1590.
- Diniz, P. S. R. & A. Antoniou, (1986). More Economical State-Space Digital-Filter Structures Which Are Free of Constant Input Limit Cycles, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-34:807-815.
- Jackson, L.B., Lindgren, A. & Y. Kim, (1979). Optimal Synthesis of Second-Order State-Space Structures for Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-26:149-153.
- Kawamata, M. & T. Higuchi, (1983). A Systematic Approach to Synthesis of Limit Cycle-Free Digital Filters, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-31:212-214.
- Meerkotter, K., (1976). Realization of Limit Cycle-Free Second-Order Digital Filters, *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*: 295-298.
- Mills, W. L., C.T. Mullis & R.A. Roberts, (1978). Digital Filter Realization Without Overflow Oscillations, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-26:334-338.
- Mitra, S. K., K. Hirano & H. Sakaguchi, (1974). A Simple Method of Computing the Input Quantization and Multiplication Roundoff Errors in a Digital Filter, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-22:326-329.
- Mullis, C.T. & R. A. Roberts, (1976). Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-23:551-562.
- Sarcinelli Filho, M., (1990). Síntese de Filtros Digitais Recursivos sem Ciclos Limite, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Sarcinelli Filho, M., C. Perim da Cruz e A.C.S. Simmer, (1992). Sobre o Escalamento em Norma Infinita de Filtros Digitais de Segunda Ordem sem Ciclos Limite, submetido para publicação na *Revista Controle e Automação*, da Sociedade Brasileira de Automática.
- Vaidyanathan, P. P. & V. Liu, (1987). An Improved Sufficient Condition For Absence of Limit Cycles in Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-34:319-322.