
UMA ABORDAGEM NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA A CARACTERIZAÇÃO DE "CONTROLADORES ADMISSÍVEIS"

João Yoshiyuki Ishihara & Roberto Moura Sales

Departamento de Engenharia Eletrônica

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

CP 61548 CEP 05424-970 São Paulo - SP

RESUMO : Neste artigo apresentamos uma forma alternativa à teoria de fatoração coprima de sistemas lineares, invariantes no tempo e multivariáveis para a determinação dos controladores que estabilizam internamente uma planta dada. A abordagem considerada permite que a parametrização de Youla seja obtida a partir de conceitos da teoria de variáveis de estado, e abre a perspectiva da caracterização de parametrizações particulares que simplificam a solução de problemas de otimização H_2 e H_∞ .

ABSTRACT : This paper presents an alternative form to the coprime factorization theory of multivariable linear time-invariant systems for the determination of the controllers that internally stabilizes a given plant. The considered approach allows to derive the Youla parametrization from the concepts of state space variables theory, which opens the possibility for the characterization of some simpler particular parametrizations for the solution of the H_2 and H_∞ optimization problems.

Keywords : internal stability, Youla parametrization, H_2 -control, H_∞ -control.

1. INTRODUÇÃO

Em vários trabalhos existentes na literatura (Francis, 1987, Glover *et alii*, 1991, Green *et alii*, Hung, 1989, Kawatani, 1989, Liu *et alii*, 1990) utiliza-se a parametrização de Youla dos "controladores admissíveis" para uma planta generalizada dada como ponto de partida para se resolver problemas de otimização. Esta parametrização é usualmente obtida fazendo-se uma fatoração coprima sobre RH_∞ (Vidyasagar, 1985). Nesta abordagem, supondo que a planta generalizada é dada por :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

é necessário buscar uma fatoração duplo-coprime de G_{22} sobre RH_∞ (Francis, 1987) :

$$G_{22} = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l \quad (1.2.a)$$

onde deve ser satisfeita a identidade de Bezout :

$$\begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (1.2.b)$$

$$\text{com } \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} \in RH_\infty. \quad (1.2.c)$$

A partir daí obtém-se a parametrização de Youla dos controladores admissíveis.

Embora haja uma fórmula geral em termos de elementos de estados para (1.2) (Francis, 1987, Vidyasagar, 1985), em problemas de otimização pode ser apropriado determinar uma

* Artigo submetido em 29/06/94

1ª revisão em 28/10/94

2ª revisão em 19/12/95

Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. Liu Hsu

realização particular quando se conhecem algumas restrições para a planta em estudo. Assim, por exemplo, em (Rotea & Khargonekar, 1991), determina-se uma realização conveniente para o caso de realimentação de estados para se resolver o problema H_2/H_∞ .

Visando uma forma sistemática para se determinar realizações convenientes para casos particulares, neste trabalho os controladores admissíveis serão parametrizados usando técnicas no domínio do tempo. Desta forma, não apenas a parametrização de Youla como também parametrizações convenientes para determinados tipos de plantas podem ser obtidas sem recorrer à fatoração de sistemas de (Vidyasagar, 1985).

A seção 2 contém um resumo da notação que será usada. Na seção 3 apresentamos a parametrização dos controladores admissíveis.

2. PRELIMINARES

Como notação básica, utilizaremos \mathbb{R} para denotar o corpo dos números reais, R_p o conjunto das matrizes de transferência próprias, e RH_∞ as matrizes em R_p estáveis. Além disso, A_L^{-1} denota inversa à esquerda da matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de posto coluna máximo, e $\lambda(A)$ o conjunto dos autovalores da matriz A .

Um sistema generalizado é uma matriz $G \in R_p$ particionada na forma :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

A transformação linear fracionária $\mathfrak{F}(*,*)$ — a função de transferência de malha fechada (FTMF) de w para z do sistema da figura 2.1 — é dada por :

$$\mathfrak{F}(G,K) := G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}. \quad (2.2)$$

Em um abuso de linguagem, também utilizaremos $\mathfrak{F}(G,K)$ para nos referirmos ao diagrama de blocos da figura 2.1.

Para sistemas generalizados $G \in R_p$ e $Z \in R_p$ de dimensões $(l+m) \times (p+q)$ e $(q+s) \times (m+r)$, respectivamente, o sistema resultante para G e Z conectados conforme a figura 2.2 é dado por :

$$\mathfrak{F}_2(G,Z) :=$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} + G_{12}Z_{11}(I - G_{22}Z_{11})^{-1}G_{21} & G_{12}(I - Z_{11}G_{22})^{-1}Z_{12} \\ Z_{21}(I - G_{22}Z_{11})^{-1}G_{21} & Z_{22} + Z_{21}G_{22}(I - Z_{11}G_{22})^{-1}Z_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Como antes, utilizaremos $\mathfrak{F}_2(G,K)$ para nos referirmos também ao diagrama de blocos da figura 2.2.

Com $\mathfrak{F}(*,*)$ e $\mathfrak{F}_2(*,*)$ representando diagramas de blocos, é fácil ver que, se no diagrama da figura 2.1 tivermos $K = \mathfrak{F}(Z, Q)$, então, $\mathfrak{F}(G, \mathfrak{F}(Z,Q)) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_2(G,Z), Q)$. Assim, escrevemos

$$\mathfrak{F}(G, Z, Q) := \mathfrak{F}(G, \mathfrak{F}(Z,Q)) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_2(G,Z), Q). \quad (2.4)$$

A noção de frações equivalentes (Vidyasagar, 1985, p.376) define uma classe de equivalência $[*]$ em R_p onde temos: $Z = (z_{ij}) \in [G]$ sempre que z_{ij} e g_{ij} são frações equivalentes. Note que as operações de soma e de multiplicação presentes acima são operações válidas sobre esta classe de equivalência. Desta forma, a cada matriz $G \in R_p$ de dimensão $q \times m$ pertencente à classe $[G]$ dizemos que a matriz

$$G_s := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+m)}$$

é uma realização no espaço de estados associada a G se $C(sI - A)^{-1}B + D \in [G]$. Dizemos que G_s é uma realização internamente estável se a matriz A for estável (assintoticamente).

O conjunto de todas as realizações que podemos associar a uma matriz G é denotado por Σ_G . Em Σ_G definimos a relação de equivalência \simeq da seguinte maneira: para as realizações $G_{s_1} \in \Sigma_G$ e $G_{s_2} \in \Sigma_G$ dizemos que $G_{s_1} \simeq G_{s_2}$ se a passagem de G_{s_1} para G_{s_2} se faz mediante uma transformação de similaridade e/ou pelo acréscimo/eliminação de modos "escondidos" estáveis. Com isso, devido à possibilidade de termos várias realizações associadas a (2.2) e (2.3) mesmo tendo as realizações de G , K e de Z fixas, escrevemos $\mathfrak{F}(*,*)$ e $\mathfrak{F}_2(*,*)$ para indicar que estamos considerando as seguintes realizações dadas por (OP1) e (OP2) :

(OP1) Conexão em feedback $\mathfrak{F}(*,*)$

$$\mathfrak{F}(G_s, K_s) :=$$

$$\begin{bmatrix} A + B_2\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}C_2 & B_2\eta + B_2\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{22}\eta & B_1 + B_2\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{21} \\ \beta(I - D_{22}\eta)^{-1}C_2 & \alpha + \beta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{22}\eta & \beta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{21} \\ C_1 + D_{12}\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}C_2 & D_{12}\eta + D_{12}\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{22}\eta & D_{11} + D_{12}\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{21} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Condição de consistência : $\det(I - D_{22}\eta) \neq 0$.

Aqui, $\mathfrak{F}(G_s, K_s)$ é a realização associada à FTMF de w para z , $\mathfrak{F}(G,K)$, obtida pelas regras usuais de conexão de sistemas no domínio do tempo para o diagrama da figura abaixo.

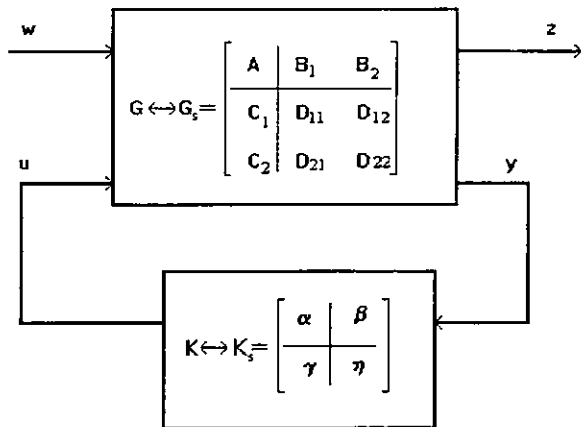


figura 2.1

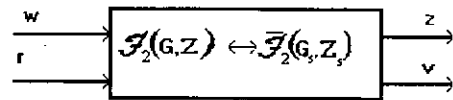


figura 2.2

Vamos denotar a matriz-A de $\bar{F}(G_s, K_s)$ por $\bar{A}(G_s, K_s)$ e a matriz-A de $\bar{F}_2(G_s, Z_s)$ por $\bar{A}(G_s, Z_s)$. Por (OP1) e (OP2) é fácil verificar que, fixadas as realizações G_s, Z_s e Q_s de G, Z e Q , respectivamente, podemos escrever (Cf. (2.4)) :

$$\bar{F}(G_s, Z_s, Q_s) := \bar{F}(G_s, \bar{F}(Z_s, Q_s)) = \bar{F}(\bar{F}_2(G_s, Z_s), Q_s)$$

$$\bar{A}(G_s, Z_s, Q_s) := \bar{A}(G_s, \bar{F}(Z_s, Q_s)) = \bar{A}(\bar{F}_2(G_s, Z_s), Q_s)$$

(2.7)

Quando a realização da conexão em feedback não é necessariamente aquela obtida diretamente de (OP1) ou de (OP2), denotaremos simplesmente por $\bar{F}(*, *)$, ou por $\bar{F}_2(*, *)_s$. As notações "s" e "-" , introduzidas aqui para maior clareza dos passos usados nas demonstrações deste artigo, não são comuns na literatura $H_2 - H_\infty$. Para o leitor mais familiarizado, o subscrito "s" e o sobrescrito "-" podem ser eliminados. Neste caso, G é uma espécie de "anfíbio" que representa a um tempo uma realização de estados e uma matriz de transferência, e os diagramas das figuras 2.1 e 2.2 podem ser considerados tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Em termos de elementos do espaço de estados da figura 2.1, temos a seguinte definição.

Definição 2.1 : Dizemos que K estabiliza internamente o sistema generalizado G se, para $w = 0$, os estados de G e de K tendem a zero a partir de qualquer condição inicial. Ou seja, K estabiliza internamente G se e só se

$$\bar{A}(G_s, K_s) =$$

$$\begin{bmatrix} A + B_2\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}C_2 & B_2\gamma + B_2\eta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{22}\gamma \\ \beta(I - D_{22}\eta)^{-1}C_2 & \alpha + \beta(I - D_{22}\eta)^{-1}D_{22}\gamma \end{bmatrix}$$

é estável.

Dizemos ainda que este K é um controlador admissível do sistema generalizado G e escrevemos $K_s \in \mathcal{A}(G_s)$.

Na definição de estabilidade interna está subentendido que o sistema é bem definido, i.e., que $\det(I - D_{22}\eta) \neq 0$, ou de forma equivalente, que $\det(I - \eta D_{22}) \neq 0$.

Observe que na definição acima temos $\bar{A}(G_s, K_s)$ independente de B_1, C_1, D_{11}, D_{12} e D_{21} . Desta forma, é de se esperar que, na parametrização dos controladores admissíveis para G, a expressão da realização do controlador K seja em função apenas de A, B_2, C_2 e D_{22} , ou seja, dependa apenas da realização de G_{22} . Este fato simples corresponde ao teorema 4.2 de (Francis, 1987), e é um elemento básico na determinação da expressão da

(OP2) Conexão em feedback para sistemas generalizados $\bar{F}_2(*, *)$

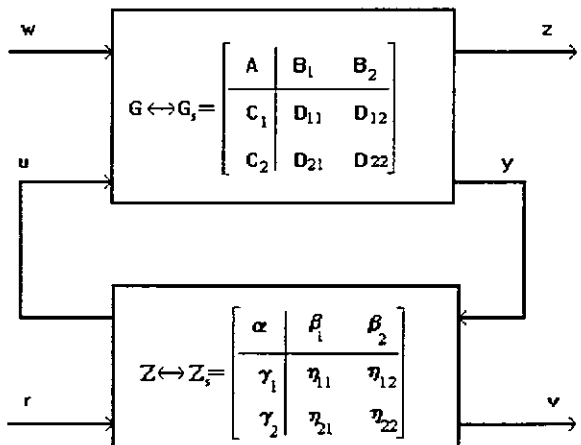
$$\bar{F}_2(G_s, Z_s) =$$

$$\begin{bmatrix} A+B_2\eta_{11}XC_2 & B_2\gamma_1+B_2\eta_{11}XD_{22}\gamma_1 & B_1+B_2\eta_{11}XD_{21} & B_2\eta_{12}+B_2\eta_{11}XD_{22}\eta_{12} \\ \beta_1XC_2 & \alpha+\beta_1XD_{22}\gamma_1 & \beta_1XD_{21} & \beta_2+\beta_1XD_{22}\eta_{12} \\ C_1+D_{12}\eta_{11}XC_2 & D_{12}\gamma_1+D_{12}\eta_{11}XD_{22}\gamma_1 & D_{11}+D_{12}\eta_{11}XD_{21} & D_{12}\eta_{12}+D_{12}\eta_{11}D_{22}\eta_{12} \\ \eta_{21}XC_2 & \gamma_2+\eta_{21}XD_{22}\gamma_1 & \eta_{21}XD_{21} & \eta_{22}+\eta_{21}XD_{22}\eta_{12} \end{bmatrix}$$

(2.6)

onde $X := (I - D_{22}\eta_{11})^{-1}$. Condição de consistência : $\det(I - D_{22}\eta_{11}) \neq 0$.

Aqui, $\bar{F}_2(G_s, Z_s)$ é a realização associada à matriz de transferência de $\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix}$, $\bar{F}_2(G, Z)$, obtida pelas regras usuais de conexão de sistemas no domínio do tempo para o diagrama da figura abaixo.



|||

parametrização dos controladores admissíveis do sistema generalizado G e na correspondente parametrização das FTMF.

3. ESTABILIDADE INTERNA

A seguir apresentamos a teoria de estabilização usando técnicas no domínio do tempo.

Vamos assumir que a planta G(s) tem a realização dada por:

$$G_s = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

A restrição $D_{22} = 0$ pode ser assumida sem perda de generalidade. Esta simplificação garante que o sistema é bem definido para qualquer controlador próprio K.

Observando que $\bar{A}(G_s, Z_s, Q_s)$, $\bar{A}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s, Q_s)$ e $\bar{A}(G_s, \mathfrak{F}(Z_s, Q_s)_s)$ não são necessariamente iguais, vamos considerar o lema seguinte. Ele será importante na determinação de controladores admissíveis.

Lema 3.1 : Sejam dados a planta generalizada $G \in R_p$ e o controlador $K \in R_p$ com realizações G_s e K_s , respectivamente. Sejam ainda Z e $Q \in R_p$ com realizações Z_s e Q_s tais que $K_s \simeq \mathfrak{F}(Z_s, Q_s)$. Se $\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s \simeq \mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)$ então $K_s \in \mathcal{A}(G_s) \Leftrightarrow Q_s \in \mathcal{A}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s)$.

Demonstração : Da definição 2.1 e por (2.7) temos :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(Z_s, Q_s) \in \mathcal{A}(G_s) &\Leftrightarrow \bar{A}(G_s, Z_s, Q_s) \text{ é estável} \\ &\Leftrightarrow \bar{A}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s, Q_s) \text{ é estável.} \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s \simeq \mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)$, ou seja, como a realização $\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s$ foi obtida a partir da realização $\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)$ por uma transformação de similaridade e/ou acrescentando-se ou eliminando-se modos não controláveis e/ou não observáveis estáveis, temos que $\bar{A}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s, Q_s)$ é estável se e só se $\bar{A}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s), Q_s)$ é estável. \square

No lema acima, o subscrito "s" pode ser eliminado. Neste caso, G, Z, K e Q são matrizes de transferência e o único cuidado que devemos tomar para garantir a estabilidade interna é que não haja cancelamento de modos instáveis.

O seguinte lema será necessário para a determinação de todos os controladores admissíveis.

Lema 3.2 : Suponha G_s dado por (3.1) com D_{12} e D_{21} inversíveis. Se $A - B_1 D_{21}^{-1} C_2$ e $A - B_2 D_{12}^{-1} C_1$ são estáveis então $Q_s \simeq \mathfrak{F}(G_s, K_s) \Leftrightarrow K_s \simeq \mathfrak{F}(Z_s, Q_s)$, $Q \in R_p$ onde $Z_s :=$

$$\left[\begin{array}{c|cc} A - B_1 D_{21}^{-1} C_2 - B_2 D_{12}^{-1} (C_1 - D_{11} D_{21}^{-1} C_2) & (B_1 - B_2 D_{12}^{-1} D_{11}) D_{21}^{-1} & B_2 D_{12}^{-1} \\ \hline - D_{12}^{-1} (C_1 - D_{11} D_{21}^{-1} C_2) & - D_{12}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1} & D_{12}^{-1} \\ - D_{21}^{-1} C_2 & D_{21}^{-1} & 0 \end{array} \right] \quad (3.2)$$

Demonstração : Sendo G_s dado por (3.1) e Z_s por (3.2), pela regra de conexão (OP2) e usando a transformação de similaridade $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(G_s, Z_s) &\simeq \\ &\left[\begin{array}{c|cc} A - B_2 D_{12}^{-1} C_1 & - B_2 D_{12}^{-1} (C_1 - D_{11} D_{21}^{-1} C_2) & B_1 - B_2 D_{12}^{-1} D_{11} & B_2 D_{12}^{-1} \\ \hline 0 & A - B_1 D_{21}^{-1} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & - (C_1 - D_{11} D_{21}^{-1} C_2) & 0 & I \\ 0 & - D_{21}^{-1} C_2 & I & 0 \end{array} \right] \\ &\simeq \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} =: \mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $\mathfrak{F}_2(Z_s, G_s)_s := \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \simeq \mathfrak{F}_2(Z_s, G_s)$. Segue daí que para $K_s \simeq \mathfrak{F}(Z_s, Q_s)$ temos

$$Q_s = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s)_s, Q_s) \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_2(G_s, Z_s), Q_s) =$$

$$\mathfrak{F}(G_s, \mathfrak{F}(Z_s, Q_s)) \simeq \mathfrak{F}(G_s, K_s)$$

e para $Q_s \simeq \mathfrak{F}(G_s, K_s)$ temos

$$K_s \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_2(Z_s, G_s)_s, K_s) = \mathfrak{F}(Z_s, \mathfrak{F}(G_s, K_s)) \simeq \mathfrak{F}(Z_s, Q_s). \quad \square$$

O lema 3.2 determina, a grosso modo, a solução da equação $\mathfrak{F}(G, K) = Q$ onde G e Q são dados e K é a incógnita. Note que de forma análoga à equação matricial $GK = Q$, isto exige a determinação de uma inversa Z para G, resultando a solução $K = ZQ$.

Na proposição seguinte obtemos a parametrização de Youla de todos os controladores admissíveis (Francis, 1987, Vidyasagar, 1985) aplicando os dois lemas acima.

Proposição 3.1 : Seja a realização da planta generalizada dada por (3.1) onde é suposto que (A, B_2, C_2) é estabilizável e detectável. Para quaisquer F, L, D_{11z} , D_{12z} e D_{21z} satisfazendo

$$(i) \quad D_{12z} \text{ e } D_{21z} \text{ são inversíveis,} \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad A + LC_2 \text{ é estável} \quad (3.4)$$

$$(iii) \quad A + B_2 F \text{ é estável} \quad (3.5)$$

temos que

$$K_s \in \mathcal{A}(G_s) \Leftrightarrow K_s \simeq \mathfrak{F}(Z_s, Q_s), \quad Q_s \text{ internamente estável} \quad (3.6.1) \text{ onde}$$

$$Z_s := \left[\begin{array}{c|cc} A_z & B_{1z} & B_{2z} \\ \hline C_{1z} & D_{11z} & D_{12z} \\ C_{2z} & D_{21z} & 0 \end{array} \right] = \quad (3.6.2)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2F+LC_2 - B_2D_{11z}C_2 & B_2D_{11z} - L & B_2D_{12z} & \\ \hline F - D_{11z}C_2 & D_{11z} & D_{12z} & \\ -D_{21z}C_2 & D_{21z} & 0 & \end{array} \right] \quad (3.6.3)$$

Demonstração :

A demonstração será desenvolvida de maneira construtiva. Dada a planta (3.1), consideremos os controladores da forma $K_s = \tilde{\mathfrak{F}}(Z_s, Q_s)$, onde Z_s é dada por (3.6.2), e a realização de Q dada por $Q_s = \left[\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right]$. Vamos determinar uma realização

$$\tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, Q_s)_s \simeq \tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, Q_s).$$

Pela regra de conexão (OP2) e usando a transformação de similaridade $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$, temos:

$$\tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s) \simeq \left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2(D_{11z}C_2+C_{1z}) & B_2C_{1z} & B_1+B_2D_{11z}D_{21} & B_2D_{12z} \\ \hline 0 & A+(B_2D_{11z}-B_{1z})C_2 & -B_1-(B_2D_{11z}-B_{1z})D_{21} & B_{2z}-B_2D_{12z} \\ C_1+D_{12}(C_{1z}+D_{11z}C_2) & D_{12}C_{1z} & D_{11}+D_{12}D_{11z}D_{21} & D_{12}D_{12z} \\ \hline D_{21z}C_2+C_{2z} & C_{2z} & D_{21z}D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.7)$$

onde foi feito $A_z := A + B_2D_{11z}C_2 + B_2C_{1z} - B_{1z}C_2$ para que o bloco (2,1) se anulasse. Agora, denotando

$$F := C_{1z} + D_{11z}C_2 \quad (3.8)$$

$$L := B_2D_{11z} - B_{1z} \quad (3.9)$$

e impondo as restrições

$$C_{2z} := -D_{21z}C_2 \quad (3.10)$$

$$B_{2z} := B_2D_{12z} \quad (3.11)$$

Z_s fica na forma (3.6.3), e além disso,

$$\tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s) \simeq \tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s)_s :=$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2F & B_2C_{1z} & B_1+B_2D_{11z}D_{21} & B_2D_{12z} \\ \hline 0 & A+LC_2 & -(B_1+LD_{21}) & 0 \\ C_1+D_{12}F & D_{12}C_{1z} & D_{11}+D_{12}D_{11z}D_{21} & D_{12}D_{12z} \\ \hline 0 & -D_{21z}C_2 & D_{21z}D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.12)$$

Finalmente,

$$\tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, Q_s) \simeq \tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, Q_s)_s :=$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A+B_2F & B_2C_{1z} - B_2D_{12z}D_QD_{21z}C_2 & B_2D_{12z}C_Q & * \\ \hline 0 & A+LC_2 & 0 & * \\ 0 & -B_QD_{21z}C_2 & A_Q & * \\ \hline * & * & * & * \end{array} \right] \quad (3.13)$$

onde * denota os termos que não são importantes para a análise.

Seja \bar{A} a matriz-A de $\tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, Q_s)_s$. Tem - se que $\bar{A}(G_s, Z_s, Q_s)$ é similar a \bar{A} e

$$\lambda(\bar{A}) = \lambda(A+B_2F) \cup \lambda(A+LC_2) \cup \lambda(A_Q). \quad (3.14)$$

Como (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável, podemos determinar F e L tais que $A+B_2F$ e $A+LC_2$ sejam estáveis.

Neste caso, pela definição 2.1 :

$$Q_s \in \mathcal{A}(\tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s)_s) \Leftrightarrow \bar{A} \text{ estável} \Leftrightarrow A_Q \text{ estável} \Leftrightarrow Q \text{ internamente estável.} \quad (3.15)$$

Assim, todos os controladores dados por (3.6) estabilizam internamente G .

Falta mostrar que todos os controladores admissíveis podem ser postos na forma (3.6).

Sejam F e L tais que $A+B_2F$ e $A+LC_2$ sejam estáveis. Sendo D_{12z} e D_{21z} inversíveis, pelo lema 3.2, podemos determinar um sistema H com realização H_s tal que:

$$\tilde{\mathfrak{F}}_2(Z_s, H_s) \simeq \tilde{\mathfrak{F}}_2(H_s, Z_s) \simeq \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Este H_s é dado por

$$H_s := \left[\begin{array}{cc|cc} A & -LD_{21z}^{-1} & B_2 & \\ \hline -D_{12z}^{-1}F & -D_{12z}D_{11z}D_{21z}^{-1} & D_{12z}^{-1} & \\ C_2 & D_{21z}^{-1} & 0 & \end{array} \right] \quad (3.17)$$

É fácil verificar que, para este H_s , $\tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s, H_s) \simeq G_s$.

Assim, para qualquer $K \in R_p$ temos

$$\tilde{\mathfrak{F}}(G_s, K_s) \simeq \tilde{\mathfrak{F}}(G_s, Z_s, H_s, K_s). \quad (3.18.1)$$

Seja

$$Q_s := \tilde{\mathfrak{F}}(H_s, K_s). \quad (3.18.2)$$

Como H_s está nas condições do lema 3.2, $K_s \simeq \tilde{\mathfrak{F}}(Z_s, Q_s)$. Além disso, se $K_s \in \mathcal{A}(G_s)$, por (3.18) temos que $\bar{A}(G_s, Z_s, H_s, K_s)$ é estável. Daí $Q_s = \tilde{\mathfrak{F}}(H_s, K_s) \in \mathcal{A}(\tilde{\mathfrak{F}}_2(G_s, Z_s)_s)$ e de (3.15) segue que Q_s é internamente estável. Assim, para qualquer K admissível, temos que K_s é da forma (3.6) para algum $Q_s(K_s)$ internamente estável. □

Como a proposição 3.1 exige que a realização de Q seja internamente estável, para o que segue, será considerado que a realização adotada para Q não tenha modos escondidos instáveis. Neste caso, Q_s internamente estável é sinônimo de $Q \in RH_\infty$.

Corolário 3.1 : Nas condições da proposição anterior, com os controladores K dados por (3.6), o conjunto de todas as funções de transferência de malha fechada é parametrizado por :

$$\tilde{\mathfrak{F}}(G, K) = \tilde{\mathfrak{F}}(T, Q) = T_{11} + T_{12}QT_{21}, \quad Q \in RH_\infty. \quad (3.19.1)$$

onde

$$(T_{11})_s = \left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2F & B_2(F-D_{11z}C_2) & B_1+B_2D_{11z}D_{21} & \\ \hline 0 & A+LC_2 & -(B_1+LD_{21}) & \\ C_1+D_{12}F & D_{12}(F-D_{11z}C_2) & D_{11}+D_{12}D_{11z}D_{21} & \end{array} \right] \quad (3.19.2)$$

$$(T_{12})_s = \left[\begin{array}{c|c} A+B_2F & B_2D_{12z} \\ \hline C_1+D_{12}F & D_{12}D_{12z} \end{array} \right] \quad (3.19.3)$$

$$(T_{21})_s = \left[\begin{array}{c|c} A+LC_2 & B_1+LD_{21} \\ \hline D_{21z}C_2 & D_{21z}D_{21} \end{array} \right] \quad (3.19.4)$$

Demonstração : Imediata. A expressão de $(T_{ij})_s$ sai de (3.12). \square

Observação 3.1 : Se $D_{22} \neq 0$, os resultados são facilmente obtidos fazendo-se $\tilde{\mathcal{F}}_2(\bar{G}_s, \bar{Z}_s) = \tilde{\mathcal{F}}_2(G_s, Z_s)$, onde

$$G_s = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad Z_s = \left[\begin{array}{c|cc} \alpha & \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \gamma_1 & \eta_{11} & \eta_{12} \\ \gamma_2 & \eta_{21} & \eta_{22} \end{array} \right]$$

$$\bar{G}_s = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad \bar{Z}_s = \left[\begin{array}{c|cc} \bar{\alpha} & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \\ \hline \bar{\gamma}_1 & \bar{\eta}_{11} & \bar{\eta}_{12} \\ \bar{\gamma}_2 & \bar{\eta}_{21} & \bar{\eta}_{22} \end{array} \right]$$

e Z_s e \bar{Z}_s são relacionados por

$$\bar{Z}_s =$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \alpha + \beta_1 D_{22} (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & \beta_1 (I - D_{22} \eta_{11})^{-1} & \beta_2 + \beta_1 D_{22} (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \\ \hline (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{11} & (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \\ \gamma_2 + \eta_{21} D_{22} (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & \eta_{21} (I - D_{22} \eta_{11})^{-1} & \eta_{22} + \eta_{21} D_{22} (I - \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \end{array} \right] \quad (3.20)$$

$$Z_s =$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \alpha - \beta_1 D_{22} (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & \beta_1 (I + D_{22} \eta_{11})^{-1} & \beta_2 - \beta_1 D_{22} (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \\ \hline (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{11} & (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \\ \gamma_2 - \eta_{21} D_{22} (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \gamma_1 & \eta_{21} (I + D_{22} \eta_{11})^{-1} & \eta_{22} - \eta_{21} D_{22} (I + \eta_{11} D_{22})^{-1} \eta_{12} \end{array} \right] \quad (3.21)$$

Como $\tilde{\mathcal{F}}_2(\bar{G}_s, \bar{Z}_s) = \tilde{\mathcal{F}}_2(G_s, Z_s)$, mudando-se apenas a expressão do "controlador central" Z_s , a demonstração para o caso $D_{22} \neq 0$ é exatamente a mesma da proposição 3.1, e além disso, todas as funções de transferência de malha fechada são parametrizadas por (3.19). A condição de consistência neste caso é dada por $\det(I - \eta_{11} D_{22}) \neq 0$, ou, de forma equivalente, $\det(I + \bar{\eta}_{11} D_{22}) \neq 0$. \square

Para cada $D_{11z}, D_{12z}, D_{21z}, F$ e L satisfazendo as restrições (3.3) - (3.5) temos em (3.6) uma parametrização em Q . Assim, na proposição 3.1 e no corolário 3.1 temos uma família de parametrizações em Q . Aproveitando este fato, quando temos mais informações sobre os elementos da planta, podemos escolher alguns dos parâmetros $B_{1z}, C_{1z}, D_{11z}, D_{12z}$ e D_{21z} do controlador e, aplicando o lema 3.1, obter subfamílias com expressões mais simples para as FTMF $\tilde{\mathcal{F}}(G, K)$. Como exemplo apresentamos o corolário seguinte.

Corolário 3.2 : Suponha G_s dado por (3.1); D_{21} com posto coluna máximo. Supondo que

(i) (A, B_2) é estabilizável

(ii) $A - B_1 D_{2L}^{-1} C_2 + P(I - D_{21} D_{2L}^{-1}) C_2$ é estável para algum P onde D_{2L}^{-1} é a inversa à esquerda de D_{21} , temos

$$K_s \in \mathcal{A}(G_s) \Leftrightarrow K_s \simeq \tilde{\mathcal{F}}(Z_s, Q_s), Q \in \text{RH}_{\infty}$$

onde

$$Z_s :=$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} A_z & B_2 D_{11z} + B_1 D_{2L}^{-1} - P(I - D_{21} D_{2L}^{-1}) & B_2 D_{12z} \\ \hline F - D_{11z} C_2 & D_{11z} & D_{12z} \\ - D_{21z} C_2 & D_{21z} & 0 \end{array} \right] \quad (3.22)$$

$$A_z = A + B_2 F - B_1 D_{2L}^{-1} C_2 + P(I - D_{21} D_{2L}^{-1}) C_2 - B_2 D_{11z} C_2$$

F é tal que $A + B_2 F$ é estável

D_{12z} e D_{21z} são inversíveis

D_{11z} é livre.

Neste caso, todas as funções de transferência de malha fechada são parametrizadas por :

$$\tilde{\mathcal{F}}(G, K) = G_F + U_F Q D_{21z} D_{21}, Q \in \text{RH}_{\infty} \quad (3.23.1)$$

onde

$$(G_F)_s = \left[\begin{array}{c|c} A+B_2F & B_1+B_2D_{11z}D_{21} \\ \hline C_1+D_{12}F & D_{11}+D_{12}D_{11z}D_{21} \end{array} \right] \quad (3.23.2)$$

$$(U_F)_s = \left[\begin{array}{c|c} A+B_2F & B_2D_{12z} \\ \hline C_1+D_{12}F & D_{12}D_{12z} \end{array} \right] \quad (3.23.3)$$

Demonstração : Resolvendo a equação $B_1 + LD_{21} = 0$ obtemos $L = -B_1 D_{2L}^{-1} + P(I - D_{21} D_{2L}^{-1})$, P livre. Substituindo este valor de L em (3.19), ou equivalentemente em (3.12), obtemos $A + LC_2$ como uma parte não-controlável. Como por hipótese $A + LC_2$ é estável, segue que

$$\tilde{\mathcal{F}}(G_s, Z_s) \simeq \left[\begin{array}{c|cc} A+B_2F & B_1+B_2D_{11z}D_{21} & B_2D_{12z} \\ \hline C_1+D_{12}F & D_{11}+D_{12}D_{11z}D_{21} & D_{12}D_{12z} \\ 0 & D_{21z}D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

Substituindo o valor obtido de L na proposição 3.1 obtemos a expressão de Z_s . \square

Observação 3.2 : Para a planta no caso do corolário 3.2, as escolhas correspondentes para fazermos a fatoração (1.2) são :

$$\left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array} \right]_s :=$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} A - B_1 D_{2L}^{-1} C_2 + P(I - D_{21} D_{2L}^{-1}) C_2 & -B_2 & -B_1 D_{2L}^{-1} + P(I - D_{21} D_{2L}^{-1}) \\ \hline -D_{12z} (F - D_{11z} C_2) & -D_{12z} & D_{12z} D_{11z} \\ D_{21z} C_2 & 0 & D_{21z} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix}_s := \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2F & -B_2D_{12z} & b \\ \hline F & -D_{12z} & D_{11z}D_{21z}^{-1} \\ C_2 & 0 & D_{21z}^{-1} \end{array} \right]$$

$$b := [B_2D_{11z} + B_1D_{2L}^{-1} - P(I - D_{21}D_{2L}^{-1})]D_{21z}^{-1}$$

D_{11z} livre

D_{12z} e D_{21z} inversíveis.

Observação 3.3 : O corolário 3.2 corresponde ao caso "Full Information" (FI) que constitui o elemento básico para o estudo dos controladores H_2 e H_∞ (Doyle *et alii*, 1989). Este corolário permite corrigir as provas dos itens FI3 e FI5 de (Doyle *et alii*, 1989) conforme (Zhou, 1992). O seu uso permite obter, como resultados particulares, as expressões de todos os controladores sub-ótimos H_∞ FI apresentadas em (Mita *et alii*, 1993) e (Zhou, 1992). As escolhas referentes aos casos "Full Control" (FC), "State Feedback" (SF), "Disturbance Feedforward" (DF) e "Output Estimation" (OE) considerados na literatura (Doyle *et alii*, 1989, Liu *et alii*, 1990, Mita *et alii* 1993, Rotea *et alii*, 1991, Zhou, 1992, entre outros), são imediatas. Estes casos são exatamente aqueles nos quais podemos resolver as equações $C_1 + D_{12}F = 0$ (FC e OE), $F - D_{11z}C_2 = 0$ (SF), $B_1 + LD_{21} = 0$ (DF e FI), e proceder conforme foi feito na demonstração do corolário 3.2. Para o caso "State Feedback", podem ser obtidos facilmente como resultados particulares:

i) a expressão dos controladores admissíveis de (Rotea *et alii*, 1991),

ii) a expressão de todos os controladores ótimos H_2 e

iii) as expressões de todos os controladores sub-ótimos H_∞ de (Mita *et alii*, 1993) e (Zhou, 1992).

A parametrização de (Rotea *et alii*, 1991, lema 1, pág. 310), embora imediata pela nossa abordagem, não decorre diretamente da parametrização de (Francis, 1987).

4. CONCLUSÃO

Neste artigo, a parametrização de Youla, obtida originalmente através da solução de equações diofantinas e fatorações em RH_∞ , é totalmente desenvolvida usando-se uma abordagem no domínio do tempo. Na opinião dos autores, a tradução do conceito de estabilidade interna em termos de propriedades dos fatores coprimos da planta e do controlador envolve manipulações algébricas que tornam a abordagem excessivamente técnica. A abordagem aqui apresentada, por outro lado, trata o problema usando o conceito de estabilidade interna e as regras usuais de conexão de sistemas em diagramas de blocos, ambos para sistemas descritos na forma de variáveis de estado, e resulta bastante apelativa ao engenheiro de controle. Além disso, assim como o caso "Full Information" aqui considerado, as demais parametrizações particulares para vários casos estudados na literatura na solução de problemas de otimização H_2 e H_∞ podem ser obtidas seguindo a mesma abordagem deste artigo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis, (1989). "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", *I.E.E.E. Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, n. 8: 831-847.
- Francis, B.A., (1987). "A Course in H_∞ Control Theory", New York, Springer-Verlag,, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88.
- Glover, K. *et alii*, (1991). "A Characterization of All Solutions to the Four Block General Distance Problem", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol.29, n 2: 283-324.
- Green, M., *et alii* (1990). "A J-spectral Approach to H_∞ Control", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 28, n. 6: 1350-1371.
- Hung, Y.S., (1989). " H_∞ Optimal Control - Part I. Model Matching", *Int. J. Control*, Vol. 49, n 4: 1291-1330.
- Kawatani, R & H. Kimura, (1989). "Synthesis of Reduced-Order H_∞ Controllers Based on Conjugation", *Int. J. Control*, Vol. 50, n 2: 525-541.
- Liu, K.Z., T. Mita & R. Kawatani, (1990). "Parametrization of State Feedback H_∞ Controllers", *Int. J. Control*, Vol. 51, n 3: 535-551.
- Mita, T., K.Z. Liu, & S. Ohuchi, (1993). "Correction of the FI Result in H_∞ Control and Parametrization of H_∞ State Feedback Controllers", *I.E.E.E. Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38: 343-347.
- Rotea, M.A., & P.P. Khargonekar (1991). " H_2 -Optimal Control with an H_∞ -Constraint: the State Feedback Case", *Automatica*, Vol 27, n.2: 307-3016.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, MA, MIT Press series in signal processing, optimization, and control; Vol 7.
- Zhou, K. (1992). "On the Parametrization of H_∞ Controllers", *I.E.E.E. Trans. Automat. Control*, Vol 37, n 9; 1442-1446.