

GERAÇÃO DE UM SISTEMA DE ESTADO EXPANDIDO APLICADO À SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONVERSORES ESTÁTICOS

Denizar Cruz Martins e Fabiana Pöttker

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Departamento de Engenharia Elétrica

Instituto de Eletrônica de Potência

Cx. Postal 5119 88.040 - 970 Florianópolis - SC - Brasil

TEL.: (048)231-9204 FAX: (048)231-9770

e-mail: inep@inep.ufsc.br

RESUMO: O objetivo deste trabalho é apresentar a implementação de um algoritmo para resolução das equações de estado aplicadas à simulação numérica de conversores estáticos de potência. Na concepção desse algoritmo o vetor de entrada é considerado como a saída de um sistema linear autônomo invariante no tempo. O método consiste basicamente na integração do vetor de entrada dentro do vetor de estado expandido, cuja solução está diretamente vinculada com o vetor de entrada. A aplicação deste método é particularmente interessante nos casos em que os conversores estáticos são alimentados por fontes alternadas senoidais, onde a influência do vetor de entrada na resposta do sistema é visível.

ABSTRACT:

GENERATION OF AN EXPANDED STATE-SPACE SYSTEM APPLIED TO THE STATIC CONVERTERS NUMERICAL SIMULATION

The objective of this paper is to present the implementation of an algorithm for state equation resolution applied to the numerical simulation of static power converters. In the conception of this algorithm the input vector is assumed to be the output of a linear time-invariant autonomous system. The method consists basically in the integration of the input vector inside of the state vector, so creating an expanded state-space system, the solution of which is not directly related to the input vector. The application of this method is particularly interesting in the cases where static converters are energized by sine alternative sources. In this case the influence of the input vector in the response of the system is neat.

Keywords: Static Converters, State-Space Equations, CAD, Numerical Simulation.

1. INTRODUÇÃO

Nos estudos em Engenharia, e em especial nos referentes ao equacionamento dos conversores estáticos, é comum representar o sistema na forma de estado, ou seja, um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Essa representação é particularmente interessante por dois motivos: bem adaptada ao tratamento matemático de circuitos elétricos via computador; é possível através da mesma representar qualquer sistema físico (característica muito importante na análise de associações conversores estáticos - máquinas elétricas). Na literatura vários métodos são propostos para solucionar sistemas assim representados. Dentre eles estão incluídos os métodos de integração de etapa única do tipo Runge-Kutta de 4ª ordem e os métodos de múltiplas etapas predição-correção do tipo Adams-Moulton. O passo de cálculo nos métodos de integração numérica pode ser variável, contudo deverá estar associado a menor constante de tempo da configuração correspondente (por exemplo 1/10), o que representa um grande inconveniente (Bordry, 1985). Esse proceder implica em um aumento considerável do tempo de cálculo tornando, em certos casos, impraticável a aplicação desses métodos. Portanto, verifica-se a necessidade de se utilizar técnicas de resolução onde a escolha do passo de cálculo não esteja relacionada com a constante de tempo do circuito.

Os circuitos elétricos a semicondutor são em realidade sistemas não lineares. Contudo o estudo topológico depende das hipóteses sobre a classe dos elementos do circuito. Neste artigo os autores consideram os elementos passivos (indutâncias mútuas, capacitâncias e resistências), como elementos invariantes no tempo. Os semicondutores são representados sobre a forma de uma resistência binária variando entre dois valores que são função do estado do semicondutor (bloqueado \rightarrow elevado valor de resistência; em condução \rightarrow baixo valor de resistência). Essa escolha permite atribuir ao circuito em estudo uma topologia fixa. Os

coeficientes das matrizes de estado são portanto, independentes do tempo, para cada configuração. Essas hipóteses implicam em que qualquer conversor estático pode ser modelado por uma sequência de sistemas lineares (sistema linear por partes), preservando as mesmas variáveis de estado. Diante disso, o método de resolução mais adequado é baseado no cálculo de exponencial de matrizes, aplicando o algoritmo de expansão do sistema de estado, onde o passo de cálculo não necessita estar ligado a menor constante de tempo do circuito.

É importante salientar que o sistema de equações diferenciais apresenta uma grande dispersão nas constantes de tempo devido a representação resistiva binária dos semicondutores de potência.

2. EQUACIONAMENTO DO CIRCUITO ELÉTRICO

A partir do circuito a ser estudado define-se um grafo, onde cada componente é um ramo que liga dois nós deste grafo. Inicialmente determina-se uma árvore, que será única se for fixada a ordem de numeração dos ramos (fontes de tensão, capacitores, elementos resistivos, indutâncias e fontes de corrente). A árvore é constituída por um conjunto de ramos que liga todos os nós do grafo, sem formar um único laço. Os ramos que não pertencem a árvore serão denominados enlaces.

A conexão de um enlace à árvore permite definir um laço, dentro do qual pode circular uma corrente. As correntes independentes são portanto correntes de enlace.

Neste mesmo laço, a tensão de enlace é imposta pelas tensões dos braços da árvore. As tensões independentes são portanto as tensões dos braços de árvore.

Após o estudo da topologia do circuito elétrico obtém-se dois tipos de equações:

$$\begin{bmatrix} V_{Ec} \\ V_{Er} \\ V_{El} \\ V_j \end{bmatrix} = -[B_1] \begin{bmatrix} V_e \\ V_{bc} \\ V_{br} \\ V_{bl} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} I_E \\ I_{bc} \\ I_{br} \\ I_{bl} \end{bmatrix} = [B_1]^T \begin{bmatrix} I_{Ec} \\ I_{Er} \\ I_{El} \\ I_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde: V_{Ec} → Tensões de enlace capacitiva

V_{Er} → Tensões de enlace resistiva

V_{El} → Tensões de enlace indutiva

V_j → Tensões de fonte de corrente

V_{bc} → Tensões de braço de árvore capacitiva

V_{br} → Tensões de braço de árvore resistiva

V_{bl} → Tensões de braço de árvore indutiva

V_e → Tensões de fonte de tensão

Sendo $[B_1]$ a matriz dos laços fundamentais obtida por algoritmo a partir da matriz de incidência que exprime a posição relativa dos ramos em relação aos nós (Chua & Lin, 1975).

A natureza dos diferentes ramos pode ser expressa a partir das seguintes relações:

$$[V_{br}] = [R_b][I_{br}]; [R_b] = \begin{bmatrix} R_b(1,1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_b(NR_b, NR_b) \end{bmatrix}$$

$[R_b]$ → Matriz resistência braço de árvore

$$[V_{Er}] = [R_E][I_{Er}]; [R_E] = \begin{bmatrix} R_E(1,1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_E(NR_E, NR_E) \end{bmatrix}$$

$[R_E]$ → Matriz resistência de enlace

$$[I_{bc}] = [C_b] \frac{d[V_{bc}]}{dt}; [C_b] = \begin{bmatrix} C_b(1,1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_b(NC_b, NC_b) \end{bmatrix}$$

$[C_b]$ → Matriz capacitância braço de árvore

$$[I_{Ec}] = [C_E] \frac{d[V_{Ec}]}{dt}; [C_E] = \begin{bmatrix} C_E(1,1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_E(NC_E, NC_E) \end{bmatrix}$$

$[C_E]$ → Matriz capacitância de enlace

$$[V_{El}] = [L_E] \frac{d[I_{El}]}{dt} + [M] \frac{d[I_{bl}]}{dt}$$

$$[V_{bl}] = [L_b] \frac{d[I_{bl}]}{dt} + [M]^T \frac{d[I_{El}]}{dt}$$

Com:

$$[L_b] = \begin{bmatrix} L_b(1,1) & \dots & [L_{bm}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ [L_{bm}]^T & \dots & L_b(NL_b, NL_b) \end{bmatrix}$$

$$[L_E] = \begin{bmatrix} L_E(1,1) & \dots & [L_{Em}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [L_{Em}] & \dots & L_E(NL_E, NL_E) \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_E(1,1) & \dots & M(1, NL_E) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M(NL_b, 1) & \dots & M(NL_b, NL_E) \end{bmatrix}$$

Sendo: $[L_b] \rightarrow$ Matriz indutância braço de árvore

$[L_E] \rightarrow$ Matriz indutância de enlace

$[M] \rightarrow$ Matriz de mútuas entre indutâncias braço de árvore e indutância de enlace

Definindo $[V_{bc}]$ e $[I_{el}]$ como variáveis de estado obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_{bc} \\ I_{E1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} V_{bc} \\ I_{E1} \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \end{bmatrix} + E \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \end{bmatrix} \quad (3)$$

Denominando: $X = \begin{bmatrix} V_{bc} \\ I_{E1} \end{bmatrix} \rightarrow$ Vetor de estado

$U = \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \end{bmatrix} \rightarrow$ Vetor de entrada

Encontra-se a forma clássica:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) + E \cdot \dot{U}(t) \quad (4)$$

É possível exprimir qualquer tensão ou corrente a partir do vetor de estado através da relação:

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \quad (5)$$

O vetor $Y(t)$ deverá conter as informações relativas às correntes dos semicondutores, cujo o conhecimento é indispensável para gerar as mudanças de estado destes últimos.

As matrizes A, B, C, D, E são calculadas a partir da topologia e do valor dos componentes do circuito (a matriz E é normalmente nula (Bordry, 1985)).

DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA MATRIZ B_1

Os parâmetros da matriz B_1 são definidos da seguinte maneira:

$$B_1 = \left[\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_9 & S_{10} & S_{11} & S_{12} \\ S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} NC_E \\ \} NR_E \\ \} NL_E \\ \} NI \end{array} \right\} NR - NN + 1 = \text{numero de enlaces}$$

$$\underbrace{\overline{NT} \quad \overline{NC_b} \quad \overline{NR_b} \quad \overline{NL_b}}_{NN-1 = \text{numero de braços de árvore}}$$

$NN-1 =$ numero de braços de árvore

onde: $NR_b \rightarrow$ número de resistências braço de árvore

$NR_E \rightarrow$ número de resistências de enlace

$NC_b \rightarrow$ número de capacitâncias braço de enlace

$NC_E \rightarrow$ número de capacitâncias de enlace

$NL_b \rightarrow$ número de indutâncias braço de árvore

$NL_E \rightarrow$ número de indutâncias de enlace

$NT \rightarrow$ número de fontes de tensão

$NI \rightarrow$ número de fontes de corrente

$NR \rightarrow$ número de ramos do grafo

$NN \rightarrow$ número de nós do grafo

Cada parâmetro da matriz B_1 é uma submatriz; por exemplo: S_1 é uma submatriz com dimensão dada por $NC_E \times NT$. Portanto a dimensão de B_1 será (número de enlaces) \times (número de braços de árvore).

As submatrizes S_3 e S_4 são nulas, pois a tensão V_{EC} é expressa unicamente em função das tensões de alimentação e das tensões V_{bc} . A condição necessária para que a tensão V_{EC} seja expressa unicamente em função das tensões de alimentação e das tensões V_{bc} é a ausência de corte capacitivo.

A corrente I_{b1} é expressa unicamente em função de I_{E1} e $I_j \rightarrow S_4 = S_8 = 0$. A condição necessária para que I_{b1} seja expressa unicamente em função de I_{el} e I_j é a ausência de malha indutiva.

3. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO PELO MÉTODO DA EXPONENCIAL DE MATRIZ

3.1 Posicionamento do Problema

Nos programas de simulação numérica automática de conversores estáticos o equacionamento automático é um dos elementos determinantes do aspecto abrangente desses programas, e por consequência, do seu uso e difusão. O objetivo é definir as equações do circuito na forma de estado:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) & (a) \\ Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) & (b) \end{cases} \quad (6)$$

onde: $X(t) \rightarrow$ vetor de estado do sistema

$U(t) \rightarrow$ vetor de entrada (fontes independentes)

$Y(t) \rightarrow$ vetor de saída

Uma vez determinado $X(t)$, as matrizes A, B, C, D, serão calculadas a partir da topologia e dos valores dos componentes do circuito. O vetor $Y(t)$ deverá conter as informações relativas ao sentido das correntes dos semicondutores, cujo conhecimento é indispensável para gerar as mudanças de estado destes últimos.

A solução de um sistema de equações diferenciais lineares invariantes no tempo pode ser expressa sob a forma de um sistema discreto equivalente:

$$X[(K+1)T] = F(T).X(KT) + G[T, U(t)] \quad (7)$$

onde:

$$t_0 = KT$$

$$t = (K+1)T$$

$$\begin{cases} F(T) = e^{A.T} \\ G[T, U(t)] = e^{A.(k+1).T} \cdot \int_{kT}^{(k+1).T} e^{(-A.\lambda)} \cdot B.U(\lambda) d\lambda \end{cases}$$

Os problemas associados à solução desse sistema estão repartidos em três etapas:

1ª) Solução da matriz de comando discreta $\rightarrow G[T, U(t)]$;

2ª) Escolha do passo de cálculo (Bordry & Martins, 1985);

3ª) Cálculo da exponencial de matriz (Schonek, 1977).

Neste artigo o autor se aterá ao primeiro item.

PRIMEIRAS ESTIMATIVAS PARA A DETERMINAÇÃO DE $G[T, U(T)]$ (CHUA & LIN, 1975)

O passo de cálculo T definido na equação (7) pode em princípio ser escolhido arbitrariamente, pois ele é somente um passo de observação, que permite seguir a evolução das diferentes variáveis de estado do sistema (Bordry, 1985; Martins, 1986; Balabanian & Bickart, 1969). Contrariamente ao passo de cálculo dos métodos iterativos ele não necessita estar ligado a menor constante de tempo do circuito.

A solução da matriz de comando discreta pode ser facilmente obtida nos seguintes casos:

a) $U(t)$ é constante por partes, tal que:

$$U(t) = U(kt), \forall t \in [kT, (k+1)T]; k = 0, 1, 2, \dots$$

Assim:

$$G[T, U(t)] = [e^{A.T} - I].A^{-1}.B.U(kT) \quad (8)$$

onde I é a matriz identidade e A é uma matriz não singular.

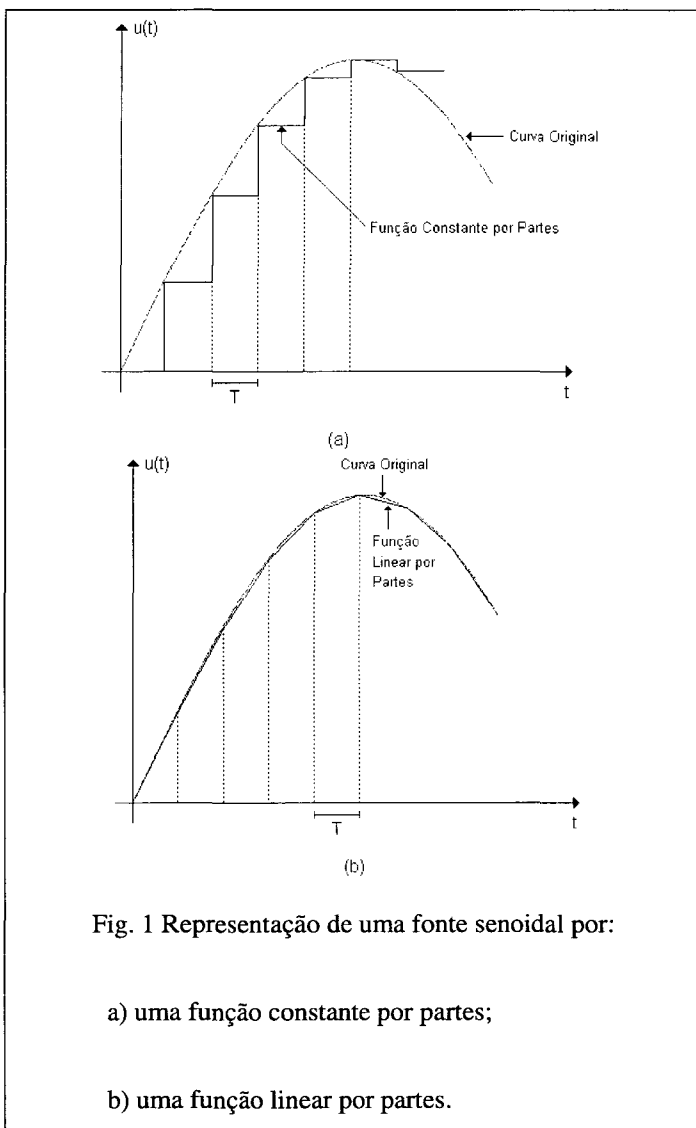


Fig. 1 Representação de uma fonte senoidal por:

a) uma função constante por partes;

b) uma função linear por partes.

Nestas condições a equação (7) pode ser escrita como segue:

$$X[(k+1)T] = e^{A.T}.X(kT) + (e^{A.T} - I).A^{-1}.B.U(kT) \quad (9)$$

No caso dos conversores estáticos a condição para que a matriz A seja não singular é equivalente a ausência de corte capacitivo (incluindo fontes de corrente) e de malha indutiva (incluindo fontes de tensão) (Bordry, 1985). Essa particularidade topológica é facilmente contornada acrescentando-se uma resistência em paralelo com um capacitor (corte capacitivo), ou em série com uma indutância (malha indutiva).

b) $U(t)$ é contínuo e linear por partes, tal que:

$$U(t) = U(kT) + \{U[(k+1)T] - U(kT)\} \cdot \frac{(t - kT)}{T}$$

$$\forall t \in [kT, (k+1)T]; k = 0, 1, 2, \dots$$

Dessa forma obtém-se:

$$G[T, U(t)] = G(T).U(kT) + H(T).U[(k+1)T] \quad (10)$$

$$\text{onde: } G(T) = [e^{A.T} \cdot (A.T - I) + I].(A^2.T^2)^{-1}.B.T$$

$$H(T) = [e^{A.T} - I - A.T].(A^2.T^2)^{-1}.B.T$$

Como resultado final encontra-se:

$$X[(k+1)T] = F(T) \cdot X(kT) + G(T) \cdot U(kT) + H(T) \cdot U[(k+1)T] \quad (11)$$

As soluções propostas até o momento não apresentam nenhuma restrição no que concerne ao emprego de fontes invariantes no tempo. Entretanto, para fontes variáveis (senoidais em particular), estas são representadas por pequenos patamares de duração iguais ao passo de cálculo (figura 1 → caso a), ou então por sequência de cordas (figuras 1 → caso b).

O efeito produzido pela aproximação apresentada na Fig. 1.a é no sentido de provocar uma defasagem entre a curva calculada e a curva teórica original. Esse efeito é tão pronunciado quanto maior for o passo de cálculo. Para contornar esse problema define-se um passo de cálculo máximo de 1/200 do período da fonte alternada, de forma que o erro cometido não exceda 3% do máximo da fonte (para um erro de 1% necessita-se de 600 passos por período da fonte) (Bordry, 1985). No caso de uma aproximação por um função linear por partes (Fig. 1.b), a escolha do passo pode ser maior, em torno de 1/50 do período, para manter um erro de 3%. Contudo, é necessário calcular e armazenar o equivalente a duas matrizes de comando discreta.

As soluções apresentadas, embora conduzam a resultados satisfatórios, penalizam sobremaneira o tempo de cálculo do sistema, tendo em vista que haverá uma quantidade de pontos calculados desnecessariamente. Portanto, elas são inadequadas a aplicações em programas que empregam a técnica do passo variável. Essa técnica tem como objetivo otimizar os pontos de cálculo mantendo elevada precisão para a solução do problema (Bordry & Martins, 1985; Martins & Bordry, 1986). O problema assume proporções incontroláveis no momento em que o passo variável assume valores relativamente grandes, a partir de então a precisão é comprometida (Martins, 1986).

Diante desse impasse o autor propõe uma solução que consiste em integrar o vetor de entrada dentro do vetor de estado, transformando o sistema original, equação (6), em um sistema autônomo, cuja a resposta não é afetada diretamente pelo vetor $U(t)$.

3.2 Integração do Vetor de Entrada Dentro do Vetor de Estado

Na aplicação da técnica do passo variável, o passo é escolhido em função da dinâmica do sistema a ser simulado. Com emprego dessa técnica, o passo de cálculo pode assumir valores importantes durante a simulação e, nessas condições as aproximações realizadas no parágrafo 3.1, para fontes senoidais, não são válidas. Para contornar esse inconveniente dois métodos podem ser considerados: o primeiro deles consiste na integração direta do termo fonte, que corresponde simplesmente ao cálculo analítico do vetor de entrada (Assini, 1987). Esse método conduz a uma expressão complexa consumindo um tempo de cálculo importante, incompatível com a técnica do passo variável; o segundo transforma o sistema de equações não autônomo (6) em um sistema autônomo integrando o vetor de entrada dentro do vetor de estado.

DETERMINAÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES AUTÔNOMO

A proposta consiste em considerar o vetor $U(t)$ como a saída de um sistema autônomo (Balabanian & Bickart, 1969), definido por:

$$\begin{cases} \frac{dXu(t)}{dt} = Au \cdot Xu(t) \\ U(t) = Cu \cdot Xu(t) \end{cases} \quad (12)$$

Essa é uma hipótese não restritiva, tendo em vista que ela pode ser estendida às funções tipo exponencial, senoidal, polinomial, e todas as suas combinações. A dificuldade se encontra na determinação do vetor $Xu(t)$. As matrizes Au e Cu são matrizes a serem determinadas.

Com o objetivo de se obter um sistema linear autônomo, são indicados dois algoritmos:

1º ALGORITMO

Seja a seguinte igualdade:

$$X_N(t) = X(t) + Q \cdot Xu(t) \quad (13)$$

$$\text{onde: } X(t) = X_N(t) - Q \cdot Xu(t) \quad (14)$$

Sendo Q uma matriz a ser determinada. A substituição da equação (14) na equação de estado (6.a) fornece o seguinte resultado:

$$\frac{dX_N(t)}{dt} - Q \cdot \frac{dXu(t)}{dt} = A \cdot X_N(t) - A \cdot Q \cdot Xu(t) + B \cdot U(t) \quad (15)$$

Levando o sistema de equações (12) em (15) e reorganizando os termos obtém-se:

$$\frac{dX_N(t)}{dt} = A \cdot X_N(t) + (Q \cdot Au - A \cdot Q + B \cdot Cu) \cdot Xu(t) \quad (16)$$

Se for possível determinar a matriz Q de maneira a satisfazer a seguinte equação algébrica linear matricial:

$$A \cdot Q - Q \cdot Au = B \cdot Cu \quad (17)$$

Então a equação (16) poderá ser reescrita como segue abaixo:

$$\frac{dX_N(t)}{dt} = A \cdot X_N(t) \quad (18)$$

com condição inicial igual a: $X_N(0) = X(0) + Q \cdot Xu(0)$

Logo a solução da equação (6.a) poderá ser expressa pelo seguinte sistema de estado discreto:

$$\begin{cases} X_N(t+T) = e^{A \cdot T} \cdot X_N(t) \\ Xu(t+T) = e^{Au \cdot T} \cdot Xu(t) \\ X(t+T) = X_N(t+T) - Q \cdot Xu(t+T) \end{cases} \quad (19)$$

A dificuldade maior na implementação deste algoritmo reside na determinação da matriz Q . Esta só poderá ser obtida se os autovalores da matriz A forem diferentes da matriz Au , caso que normalmente ocorre na simulação de conversores

estáticos. Contudo essa determinação não é evidente (Jameson, 1968; Golub *et alii*, 1979).

2º ALGORITMO: GERAÇÃO DE UM SISTEMA DE ESTADO EXPANDIDO

Introduzindo o sistema de equações (12) na equação (6.a) o sistema de estado resultante adquire a seguinte configuração:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t) + B \cdot Cu \cdot Xu(t) \\ \frac{dXu(t)}{dt} = Au \cdot Xu(t) \end{cases} \quad (20)$$

o novo vetor de estado será:

$$Xe(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \dots \\ Xu(t) \end{bmatrix}$$

Assim;

$$\frac{dXe(t)}{dt} = Ae \cdot Xe(t); \quad Ae = \begin{bmatrix} A & B \cdot Cu \\ 0 & Au \end{bmatrix} \quad (21)$$

O novo sistema gerado é representado na figura 2 em diagramas de blocos.

O sistema de estado expandido (21) é autônomo, portanto a solução discretizada será:

$$Xe[(k+1)T] = e^{Ae \cdot T} \cdot Xe(kT) \quad (22)$$

Logo não há nenhuma razão para que o passo de cálculo esteja ligado às variações das fontes senoidais.

A ordem da matriz Ae é n+m, onde n é a ordem do sistema (6.a) e m é a ordem do sistema (12). Observa-se que na maioria dos problemas de natureza prática envolvendo conversores estáticos de potência m é raramente maior que três (excepcionalmente cinco); na realidade m aumenta a ordem do sistema de um para todas as fontes contínuas e de dois para todas as fontes senoidais de mesma frequência. Além disso, a eliminação da matriz de comando discreta simplifica muito os cálculos e permite discretizar o sistema com passos de cálculo maiores.

Dentre os dois algoritmos expostos foi retido o segundo algoritmo. Ele é certamente o mais interessante devido não só à simplicidade de implementação como também ao ganho em tempo de cálculo. O primeiro algoritmo poderá ser competitivo

a partir do momento em que a determinação da matriz Q seja rápida e pouco complexa.

3.3 Determinação das Matrizes Au e Cu

O ponto chave na implementação do sistema de estado expandido reside na determinação das matrizes Au e Cu. Muitas funções de excitação são encontradas em análise de circuitos, nas quais seno e cosseno são apenas dois exemplos dessas funções. Outras funções são: função rampa, degraus e exponencial. Entretanto a alimentação de conversores estáticos de potência é normalmente realizada por fontes senoidais e/ou contínuas. Isso facilita em muito a construção das matrizes Au e Cu. Supondo uma fonte alternada da forma:

$$U(t) = U \cdot \cos(\omega t + \psi) \quad (23)$$

sendo U o valor máximo. O vetor Xu(t) será definido como segue:

$$Xu(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \cdot U(t) \\ \dots \\ \frac{dU(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$1^{\circ}) \quad \frac{dx_1}{dt} = w \cdot \frac{dU(t)}{dt} = w \cdot x_2 \quad (25)$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d[dU(t)/dt]}{dt} = -w \cdot x_1 \quad (26)$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{Xu}(t) = Au \cdot Xu(t) \quad (27)$$

A partir da definição do vetor Xu(t) é possível determinar a matriz Cu.

$$U(t) = Cu \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} w \cdot U \cdot \cos(\omega t + \psi) \\ \dots \\ -w \cdot U \cdot \sin(\omega t + \psi) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{então: } Cu = \frac{1}{w} \cdot [1 \quad 0] \quad (29)$$

Assim foram definidas as matrizes Au e Cu. O vetor inicial de Xu(t) é dado por:

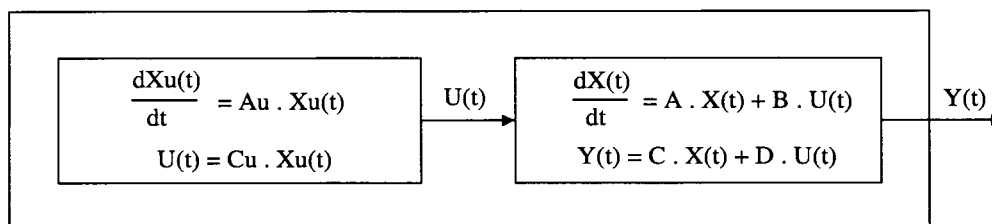


Fig. 2 - Sistema de estado expandido

$$X_u(0) = \begin{bmatrix} U \cdot w \cdot \cos \psi \\ \dots \\ -U \cdot w \cdot \sin \psi \end{bmatrix} \quad (30)$$

Estendendo-se o mesmo raciocínio para um sistema trifásico obtém-se:

$$\begin{cases} U_1(t) = U \cdot \cos(wt) \\ U_2(t) = U \cdot \cos(wt + 2\pi/3) \\ U_3(t) = U \cdot \cos(wt + 4\pi/3) \end{cases}$$

A partir da primeira fonte do sistema define-se o valor de $X_u(t)$:

$$X_u(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \cdot U_1(t) \\ \dots \\ dU_1(t)/dt \end{bmatrix}$$

$$\frac{dX_u(t)}{dt} = A_u \cdot X(t) \Rightarrow A_u = \begin{bmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a matriz A_u é preservada. O vetor $X_u(0)$ inicial será:

$$X_u(0) = \begin{bmatrix} w \cdot U \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por fim resta encontrar a matriz C_u .

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{bmatrix} = C_u \cdot \begin{bmatrix} w \cdot U \cos wt \\ \dots \\ -w \cdot U \sin wt \end{bmatrix}$$

$$C_u = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \cos 2\pi/3 & \dots & \sin 2\pi/3 \\ \cos 4\pi/3 & \dots & \sin 4\pi/3 \end{bmatrix}$$

No caso de haver fontes contínuas a determinação de A_u e C_u é imediata:

$$U(t) = k_u$$

$$\text{Portanto: } A_u = [0]$$

$$\frac{dX_u(t)}{dt} = 0 \Rightarrow X_u = 1$$

$$U(t) = C_u \cdot X_u \Rightarrow C_u = k_u$$

$$\text{com: } X_u(0) = 1$$

GENERALIZAÇÃO DO ALGORITMO

Sejam os seguintes sistemas polifásicos:

$$(1) \begin{cases} U_1(t) = U_1 \cdot \cos(w_1 t + \psi_1) \\ U_2(t) = U_1 \cdot \cos(w_1 t + \psi_2) \\ \vdots \\ U_{p-1}(t) = U_1 \cdot \cos(w_1 t + \psi_{p-1}) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} U_p(t) = U_2 \cos(w_2 t + \psi_p) \\ U_{p+1}(t) = U_2 \cos(w_2 t + \psi_{p+1}) \\ \vdots \\ U_t(t) = U_2 \cos(w_2 t + \psi_t) \end{cases}$$

$$(n) \begin{cases} U_{n'}(t) = U_n \cos(w_n t + \psi_{n'}) \\ U_{n'+1}(t) = U_n \cos(w_n t + \psi_{n'+1}) \\ \vdots \\ U_{n'+z}(t) = U_n \cos(w_n t + \psi_{n'+z}) \end{cases}$$

Os sistemas são divididos em blocos, e cada bloco é composto por um sistema de fontes de mesma frequência. Por exemplo, todas as fontes do bloco (n) apresentam uma frequência de pulsação igual a w_n . Portanto:

$$X_{u_n}(t) = \begin{bmatrix} w_n \cdot U_{n'}(t) \\ \dots \\ dU_{n'}(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \cdot U_n \cdot \cos(w_n t + \psi_{n'}) \\ \dots \\ -w_n \cdot U_n \cdot \sin(w_n t + \psi_{n'}) \end{bmatrix}$$

$$X_{u_n}(0) = \begin{bmatrix} w_n \cdot U_n \cdot \cos \psi_{n'} \\ \dots \\ -w_n \cdot U_n \cdot \sin \psi_{n'} \end{bmatrix}$$

$$A_{u_n} = \begin{bmatrix} 0 & w_n \\ -w_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{u_n} = \frac{1}{w_n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \cos(\psi_{n'+1} - \psi_{n'}) & \dots & \sin(\psi_{n'+1} - \psi_{n'}) \\ \cos(\psi_{n'+2} - \psi_{n'}) & \dots & \sin(\psi_{n'+2} - \psi_{n'}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos(\psi_{n'+z} - \psi_{n'}) & \dots & \sin(\psi_{n'+z} - \psi_{n'}) \end{bmatrix}$$

Para os outros blocos aplica-se o mesmo procedimento. A configuração final das matrizes A_u e C_u , incluindo a mais "m" fontes contínuas, é apresentada a seguir:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ \dots & \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ -w_1 & 0 \end{bmatrix} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} 0 & w_n \\ -w_n & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cu = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ M \\ K_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 \\ \frac{\cos(\psi_2 - \phi_1)}{M} & \frac{\sin(\psi_2 - \phi_1)}{M} \\ \frac{\cos(\psi_{p-1} - \psi_1)}{w_j} & \frac{\sin(\psi_{p-1} - \psi_1)}{w_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor $Xu(t)$ adquire a seguinte forma:

$$Xu(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ w_1 \cdot U_1(t) \\ \frac{dU_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ w_n \cdot U_n(t) \\ \frac{dU_n(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

É importante salientar que o algoritmo aqui desenvolvido não é restrito somente à simulação de conversores estáticos, ele pode ser, em princípio, aplicado a qualquer outro sistema linear por partes.

4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Como aplicação do algoritmo proposto será apresentada, inicialmente, a simulação de um circuito elétrico simples, que se destina a ilustrar o emprego do sistema de estado expandido. O esquema é dado na Fig. 3.

Nesta análise será observada a tensão V_c . Nas Figs. 4 e 5 foram superpostas as curvas obtidas por simulação e a curva teórica obtida analiticamente. Na Fig. 4 o equacionamento do circuito foi representado por um sistema de estado não autônomo. Observa-se aqui uma substancial defasagem devido a uma escolha proposital, de um passo de cálculo inadequado (1/50 do período de $U(t)$), para tornar evidente o problema (tempo de cálculo: 15.05s - micro computador compatível com o IBM PC-AT). A Fig. 5 apresenta as mesmas curvas para um passo de cálculo de 1/100 do período de $U(t)$. Observa-se que a defasagem diminui (tempo de cálculo 25.85s). Na Fig. 6 o circuito em questão foi modelado na forma de um sistema de estado expandido. Nesse caso, apesar da precisão da curva estar comprometida pela escolha de um elevado passo de cálculo (1/50 do período de $U(t)$), os pontos calculados são verdadeiros, isentos de defasagem. Verifica-se então a importância de um novo método de resolução das equações de estado (tempo de cálculo 19.98s).

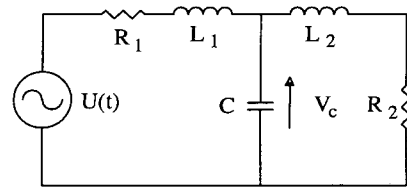


Fig. 3 - Circuito Elétrico Simples

$$U(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) \quad R_1 = 5\Omega \quad R_2 = 10\Omega \quad L_1 = 10\text{mH} \\ L_2 = 20\text{mH} \quad C = 1\mu\text{F}$$

— Curva Teórica
 ---- Sistema Discretizado não Autônomo

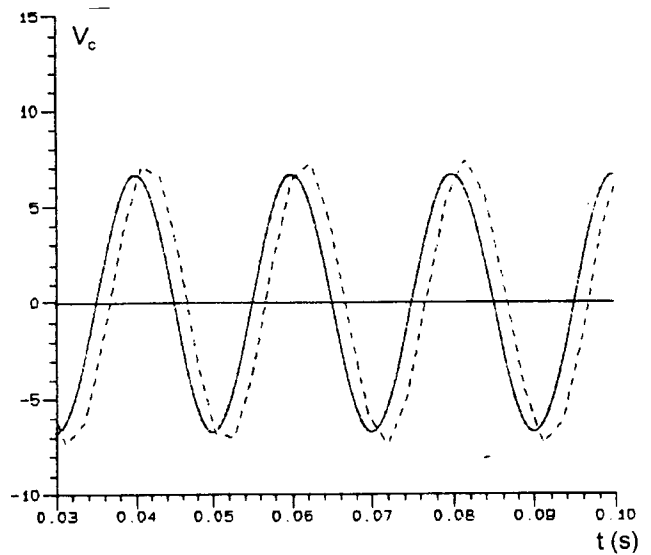


Fig. 4 Representação do Circuito por um Sistema de Equações de Estado não Autônomo

— Curva Teórica
 ---- Sistema Discretizado não Autônomo

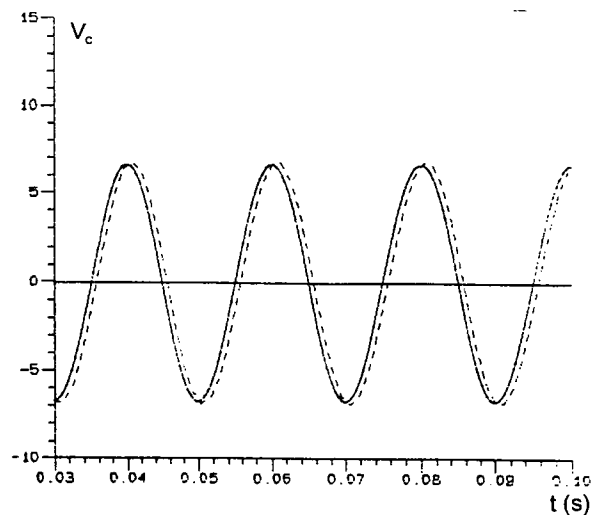


Fig. 5 - Idem Fig. 4 Para um Passo de Cálculo Menor

— Curva Teórica
 ---- Sistema Discretizado não Autônomo

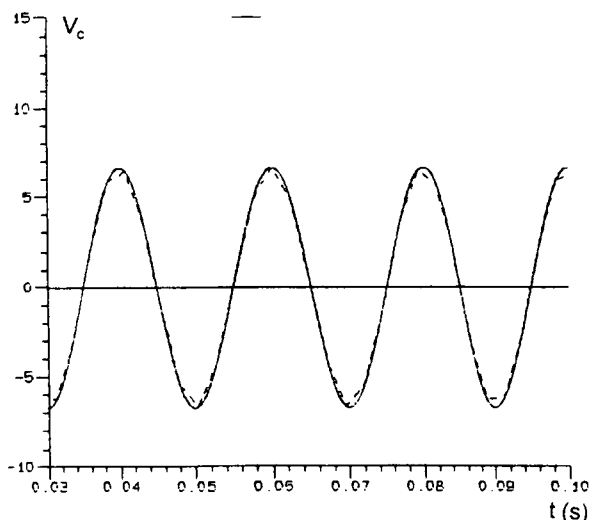


Fig. 6 - Representação do Circuito por um Sistema de Estado Expandido

O segundo exemplo é um inversor de transistores cuja a estrutura é dada na Fig. 7.

Este conversor foi particularmente escolhido para realçar o desempenho do método de integração do vetor de entrada. A Fig. 8 mostra a tensão nos terminais do diodo da ponte retificadora obtida através do método de integração do vetor de entrada (linha cheia) e do método não autônomo (linha tracejada). No método autônomo utilizou-se um passo de cálculo de 100 pontos por período. O tempo de cálculo necessário foi de 3m, 10s, 64c. Para obter-se a mesma precisão com o método não autônomo, foram necessários 7040 pontos por período, o que aumentou significativamente o tempo de cálculo, que neste caso foi de 1h, 14m, 34s 19c. Esta grande diferença entre os dois métodos ocorre porque no método não autônomo o passo de cálculo deve ser uma fração da menor constante de tempo do circuito, enquanto que no método autônomo não há necessidade dessa restrição, uma vez que os

pontos calculados estão sobre a curva analítica.

O método de geração de um sistema de estado expandido pode ser aplicado sem nenhuma restrição nos programas de simulação sequencial sem a priori (Bordry, 1985) que utilizam a técnica do passo de cálculo variável (Martins, 1986).

5. CONCLUSÃO

O trabalho desenvolvido neste artigo teve como principal finalidade apresentar um novo método numérico para resoluções de equações de estado. A partir dos exemplos assinalados fica evidente as vantagens introduzidas pela geração de um sistema de estado expandido, entre elas: solução independente do vetor de entrada, simplicidade de implementação a nível de computador e possibilidade de ser empregado com a técnica de passo variável.

Além do mais, o método exposto é absolutamente genérico, podendo ser utilizado na resolução de qualquer sistema linear de equações diferenciais na forma de estado, equações essas encontradas cotidianamente na modelagem de inúmeros sistemas físicos.

Os autores consideram esse método uma ferramenta opcional importante na análise de redes elétricas a semicondutores assistida por computador.

O algoritmo proposto nesse trabalho foi implementado no programa PROSCES (Martins, 1994) do INEP (Instituto de Eletrônica de Potência) da UFSC..

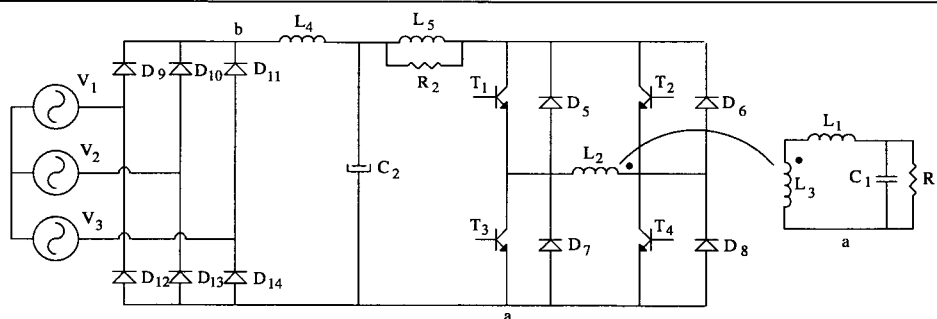


Fig. 7 - Inversor a Transistor

$$V_1(t) = 311 \cdot \text{sen} \omega t$$

$$V_2(t) = 311 \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ)$$

$$V_3(t) = 311 \cdot \text{sen}(\omega t + 240^\circ) \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$C_1 = 290 \mu\text{F} \quad C_2 = 2 \text{ mF} \quad R_1 = 4.4 \Omega \quad R_2 = 3 \Omega \quad L_1 = 5 \text{ mH} \quad L_2 = 1 \text{ H} \quad L_3 = 0.255 \text{ H} \quad L_4 = 22 \text{ mH} \quad L_5 = 10 \mu\text{H}$$

$$M_{2,3} = 0.5 \text{ H} \quad f_c = 50 \text{ Hz} \quad T_1 = T_4 \rightarrow T_{\text{on}} = 0.014701 \text{ s}, T_{\text{off}} = 0.004702 \text{ s}$$

$$T_2 = T_3 \rightarrow T_{\text{on}} = 0.004701 \text{ s}, T_{\text{off}} = 0.014702 \text{ s}$$