

APLICAÇÃO DA REDE DE HOPFIELD NA ESTIMAÇÃO ROBUSTA DE REGIÕES DE PERTINÊNCIA PARAMÉTRICA PARA MODELOS LINEARES

Ivan Nunes da Silva^(*), Lucia Valeria Ramos de Arruda^(**), Wagner Caradori do Amaral^(*)

(*) Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (DCA)
Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação (FEEC)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
CP 6101, Campinas - SP, CEP 13083-970, Brazil

(**) CPGEI / CEFET - Pr, Av. Sete de Setembro, No. 3165,
Curitiba-Pr, CEP 80230-901, Brazil

Resumo - Este trabalho propõe uma aplicação de redes neurais na estimação robusta de modelos lineares quando o erro de modelagem é limitado. Uma rede de Hopfield modificada é utilizada na obtenção de uma região de incerteza para os parâmetros do modelo. Os parâmetros internos da rede são derivados utilizando o conceito de subespaço válido de soluções, que além de garantir a convergência e a estabilidade da rede, permite a descrição politópica da região de pertinência paramétrica, ou ainda sua aproximação por um ortotopo. Através de exemplos de simulação, o desempenho da rede é comparado a de outros algoritmos robustos para cálculo destas regiões politópicas.

Abstract - This paper is concerned with the robust identification of linear model when the modeling error is assumed bounded. A modified Hopfield's Neural Network is developed to calculate a membership set for the model parameters. The valid-subspace technique is applied to obtain the internal parameters of the Hopfield's Neural Network. These parameters are explicitly computed to assure the network convergence. In this case, the equilibrium point represents a solution to robust estimation problem with unknown-but-bounded error. A comparative analysis with other robust estimation approaches is carried out by simulation examples.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos clássicos de estimação paramétrica de modelos lineares são deduzidos a partir de considerações estatísticas: supõem-se que perturbações aleatórias de função densidade de probabilidade (fdp) conhecida são adicionadas à saída do

modelo, e que os estimadores deste modelo também são variáveis aleatórias. Os métodos de identificação para esta abordagem calculam a partir da informação a priori sobre a fdp da perturbação e dos dados medidos, a média e a variância destes estimadores (Goodwin e Payne, 1977). Se as medidas contém aberrações (*outliers*), rupturas de modelo, uma fdp desconhecida, ou ainda, se os resíduos de estimação possuem um componente determinístico devido a erros estruturais, o desempenho destes métodos é degradado (Arruda, 1992).

Dentro desta perspectiva, existem atualmente na literatura, trabalhos que supõem que a perturbação atuando no processo é limitada (abordagem UBBE: *Unknown-But-Bounded Error Approach*). Os métodos desta abordagem, denominados estimadores robustos, calculam uma região do espaço paramétrico, denominada *Região de Pertinência Paramétrica*, que é compatível com a estrutura do modelo, com os dados medidos e com os limites previamente conhecidos das perturbações. Qualquer vetor de parâmetros pertencente a esta região é considerado um estimador dos parâmetros reais do processo. A caracterização das incertezas para estes estimadores é dada por um intervalo (*Intervalo de Incerteza Paramétrica* - IIP) de valores possíveis para cada parâmetro estimado. Este intervalo é obtido a partir dos valores extremos assumidos por cada estimador na região de pertinência paramétrica.

Na abordagem UBBE, o modelo utilizado para representar o comportamento dinâmico do processo com perturbações limitadas é descrito matematicamente em termos de uma relação $F(\cdot)$, linear ou não, entre um vetor de parâmetros reais $\theta^* \in \mathfrak{R}^n$, que se deseja estimar, e a saída do processo $y(t)$ perturbado por um ruído aditivo $\omega(t)$:

$$y(t) = F(\theta^*, \phi(t)) + \omega(t) ; \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \phi(t) \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

onde $\phi(t)$ é um vetor de variáveis conhecidas (medidas ou não) inerentes ao processo, e $F(\theta^*, \phi(t))$ é uma família de modelos que representa os dados medidos. A perturbação $\omega(t)$ atuando no processo pode incluir erros de modelagem, ruídos de medida, erros de arredondamento e outros tipos de incertezas. Este erro é limitado por:

$$|\omega(t)| \leq \delta(t) \quad \delta(t) \geq 0 \quad (2)$$

Os métodos de identificação robusta sob hipótese de erro limitado, calculam a menor região $H(k, \theta)$ compatível com os dados medidos (1) e com os limites para a perturbação (2):

$$H(t, \theta) = \left\{ \theta : (y(t) - F(\phi(t), \theta(t)))^2 \leq (\delta(t))^2 \right\} \quad t \in [1, k] \quad (3)$$

Esta região representa uma família de modelos em que o valor absoluto da diferença entre a saída do processo e a saída do modelo é inferior a $|\delta(t)|$, para todo "t" e para todas as saídas medidas. A interseção destas regiões é definida como:

$$M^*(k, \theta) = \bigcap_{t=1}^k H(t, \theta) \quad (4)$$

Para modelos lineares, $H(t, \theta)$ define dois hiperplanos paralelos, ortogonais ao vetor $\phi(t)$. Portanto a região $M^*(k, \theta)$ é um poliedro convexo resultante da interseção de "2k" hiperplanos no \mathbb{R}^n . A figura 1 ilustra o cálculo desta região para ($n=2$) e ($k=5$). Para solução da equação (4) necessita-se da avaliação de "2k" desigualdades de ordem "n", o que pode requerer um excessivo esforço computacional mesmo para pequenos valores de "k".

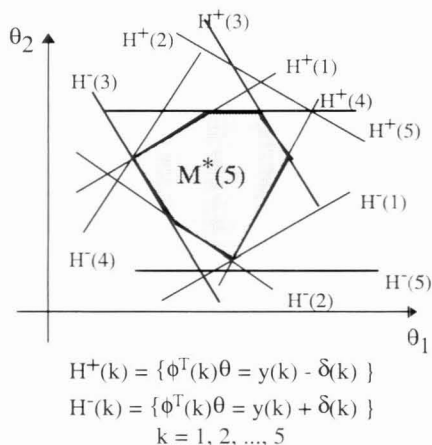


Figura 1: Poliedro $M^*(k, \theta)$

Existem na literatura algoritmos que calculam recursivamente o poliedro $M^*(k, \theta)$ a partir da interseção entre o poliedro $M^*(k-1, \theta)$, obtido com as "k-1" medidas anteriores, e o subespaço gerado pelos 2 hiperplanos $H^+(k, \theta)$ e $H^-(k, \theta)$ (Broman e Shensa, 1986; Mo e Norton, 1990). Embora recursivos, estes algoritmos apresentam uma carga computacional excessiva, que aumenta linearmente com o número de faces, arestas e vértices necessários à descrição exata do poliedro. Para se obter algoritmos que não requeiram um excessivo esforço computacional, uma solução simplificada consiste em aproximar o poliedro $M^*(k, \theta)$ por

regiões geométricas mais simples como elipsóides (Fogel e Huang, 1982; Norton, 1989) ou hipercubos (Clement e Gentil, 1988; Vicino e Milanese, 1989). Uma síntese destas diferentes soluções é feita em Arruda (1992).

Neste trabalho propõe-se a utilização de redes neurais artificiais para cálculo dos vértices do poliedro convexo gerado pelo conjunto de desigualdades lineares dados em (4). Mais especificamente, utiliza-se uma rede de Hopfield modificada cujos pontos estáveis de equilíbrio correspondem aos vértices de $M^*(k, \theta)$. O cálculo destes pontos de equilíbrio é baseado no conceito de subespaço válido de soluções desenvolvido em Aiyer *et alii* (1990). Uma das vantagens deste método é que de acordo com a direção usada pela rede na busca dos vértices do poliedro, é possível calcular uma região de pertinência paramétrica para os estimadores, ou então apenas aproximá-la por uma região hipercúbica. Assim a utilização da rede de Hopfield é uma alternativa aos algoritmos propostos em Mo e Norton (1990) para cálculo do politopo exato, ou em Clement e Gentil (1988) para a aproximação hipercúbica. Como nestes algoritmos, a rede também torna possível o cálculo exato de um intervalo de incerteza paramétrica para cada estimador.

A seguir, na seção 2, apresenta-se a rede de Hopfield modificada e descreve-se como utilizar a técnica de cálculo de um subespaço válido de solução na obtenção dos parâmetros desta rede. Na seção 3, mapeia-se o problema de estimação paramétrica robusta como descrito nesta introdução, através da rede de Hopfield proposta na seção 2. Esta rede é usada na seção 4 para a estimação de parâmetros de processos simulados. Os resultados obtidos são comparados aos obtidos através do método do politopo exato proposto em Mo e Norton (1990). Finalmente, na seção 5 apresenta-se as conclusões e novas linhas de pesquisa para aplicação de redes neurais artificiais na estimação de sistemas não - lineares com perturbações limitadas.

2. REDE DE HOPFIELD MODIFICADA

Uma rede neural artificial (RNA) típica é composta de vários elementos computacionais simples, denominados nós ou neurônios, arrumados em camadas, ligados entre si por conexões com pesos variáveis (parâmetros da rede), e operando em paralelo. A saída "u" de um neurônio típico com "n" entradas, como o mostrado na figura 2 é calculada, aplicando-se a função de ativação do neurônio $g(\cdot)$ à soma algébrica ponderada de suas entradas v_i . O neurônio também possui um limiar interno característico, neste caso denominado i^b . Os valores de T_i correspondentes aos pesos dados a cada entrada, são calculados durante a fase de treinamento da rede, a fim de se obter a solução do problema mapeado pela rede.

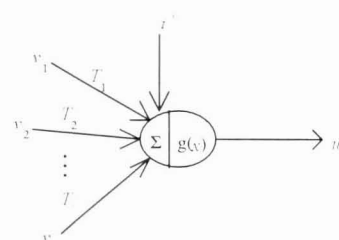


Figura 2: Exemplo de um neurônio típico

Segundo suas topologias básicas, as RNAs podem ser separadas em duas classes de acordo com os tipos de conexão entre os nós, e com a direção do fluxo de dados na rede: *redes em camadas* onde o fluxo de dados segue estritamente numa direção, da entrada para a saída; e *redes recorrentes* que admitem conexões entre elementos de uma mesma camada e realimentação dos dados. Assim um modelo baseado em redes neurais artificiais é especificado pela topologia da rede, características dos nós e pelas regras de treinamento ou aprendizagem.

A rede de Hopfield típica, é uma rede recorrente de uma única camada, onde todos os nós são conectados entre si, como mostrado na figura 3.

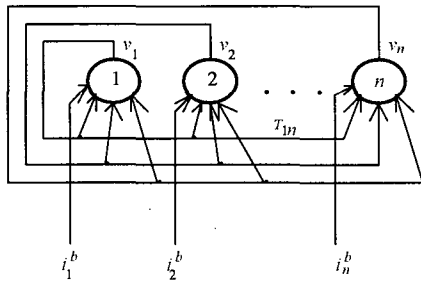


Figura 3: Rede de Hopfield

Esta rede permite a modelagem de um sistema dinâmico não-linear, contínuo no tempo através das seguintes equações diferenciais nodais:

$$\dot{u}_i(t) = -\eta u_i(t) + \sum_{j=1}^n T_{ij} v_j(t) + i_i^b \quad (5)$$

$$v_i(t) = g(u_i(t))$$

onde $u_i(t)$ é o estado interno do i -ésimo neurônio, $v_i(t)$ é a ativação de saída (ou estado de saída) do i -ésimo neurônio, T_{ij} é o peso conectando o j -ésimo neurônio com o i -ésimo neurônio, i_i^b é a entrada do i -ésimo neurônio, e $(-\eta u_i(t))$ é um termo de decaimento passivo. Se uma função de ativação do tipo sigmoide é utilizada, tem-se:

$$g(x) = \text{sigmóide}(x) = \frac{a_g}{1 + \exp(-\beta x)} - b_g, \quad g(x) \in [-b_g, a_g - b_g] \quad (6)$$

onde a_g e b_g são os termos que delimitam a saída da função, e β é o ganho de inclinação da função sigmoide; então o vetor de saídas da rede estará no interior de um hiper-cubo n -dimensional cujas faces são determinadas pelos valores de a_g e b_g , isto é, $v(t) \in [-b_g, a_g - b_g]^n$.

Em Silva (1995) é mostrado que a rede de Hopfield descrita em (5) com T simétrica convergirá assintoticamente para um ponto de equilíbrio fixo $v_f \in [-b_g, a_g - b_g]^n$ dado qualquer conjunto de condições iniciais. O número de pontos de equilíbrio e suas localizações são determinadas pelos parâmetros T e i^b da rede, e pelo parâmetro β da função sigmoide: se β é pequeno, o número de pontos de equilíbrio é pequeno e estão localizados no interior do hiper-cubo definido anteriormente; quando β aumenta, o número de pontos de equilíbrio cresce e estes pontos movem-se em direção aos

vértices do hiper-cubo; para ganhos muito altos ($\beta \rightarrow \infty$), o número de pontos de equilíbrio será máximo e eles estarão localizados nos vértices do hiper-cubo. Uma vez que o ganho é fixo, as localizações dos pontos de equilíbrio são unicamente determinadas pelas matrizes T e i^b . Além disso, para um valor de β fixo e grande, os pontos de equilíbrio da rede correspondem aos valores de $v(t)$ para os quais a função de energia $E(t)$ desta rede é minimizada:

$$E(t) = -\frac{1}{2} v(t)^T \cdot T \cdot v(t) - v(t)^T \cdot i^b \quad (7)$$

O mapeamento do problema de estimação robusta através de uma rede de Hopfield consiste então em calcular os parâmetros da rede T e i^b , tais que os vértices do poliedro convexo gerado pelas medidas em (4) correspondam aos pontos de equilíbrio da rede.

Do exposto acima, pode-se notar que a rede de Hopfield apresenta algumas vantagens que a torna apropriada na estimação de regiões de pertinência paramétrica para modelos lineares:

- a região de pertinência paramétrica está sempre confinada dentro de um hiper-cubo inicial determinado pelos valores de a_g e b_g na função sigmoide;
- a função de energia da rede, dada por (7), pode ser associada a algum critério característico do problema, que se deseja minimizar;
- os valores dos pesos T_{ij} das conexões podem ser explicitamente obtidos, dispensando-se assim a fase de treinamento da rede que consumiria um razoável esforço computacional.

Utiliza-se a técnica de subespaço válido de soluções, descrita a seguir, para determinar os valores das matrizes T e i^b nas equações (5) da rede de Hopfield.

A dificuldade em mapear problemas de otimização com restrições através de uma rede de Hopfield está em satisfazer as várias restrições que são impostas pelo problema. Uma técnica simples de mapeamento considera as restrições válidas como termos na função de energia que são minimizados quando estas restrições são satisfeitas. Assim, a rede deve minimizar simultaneamente uma função de energia simples (E^{of}), e as funções que regem as várias restrições ($E^{conf} = E^{rest1} + E^{rest2} + \dots + E^{restm}$): se qualquer uma destas restrições é violada então a solução é dita inválida. Com isso, a equação (7) para a rede de Hopfield torna-se:

$$E(t) = E^{of}(t) + E^{conf}(t) \quad (8)$$

Em Aiyer *et alii* (1990) é mostrado que os pontos de equilíbrio da rede de Hopfield relacionados com a minimização do termo E^{conf} em (8) estão confinados dentro de um subespaço válido definido por:

$$v(t) = T^{val} \cdot v(t) + s \quad (9)$$

onde:

- T^{val} é uma *matriz projeção* (isto é: $T^{val} \cdot T^{val} = T^{val}$) que projeta o vetor $v(t)$ dentro do subespaço válido: $v^{val}(t) = T^{val} \cdot v(t)$

- s é um vetor ortogonal ao subespaço-válido (isto é : $T^{val} \cdot s = 0$).

A partir do conceito de subespaço válido, as expressões analíticas de T e i^b devem ser obtidas, de modo que a minimização da função de energia $E(t)$ em (8) seja garantida. Esta minimização é feita em dois passos:

- i-) minimização de $E^{conf}(t)$ que corresponde ao confinamento de $v(t)$ no subespaço válido, onde

$$E^{conf}(t) = -\frac{1}{2} v(t)^T \cdot T^{conf} \cdot v(t) - v(t)^T \cdot i^{conf}$$

- ii-) minimização de E^{ot} para mover $v(t)$ em direção a uma solução de custo ótimo, onde

$$E^{ot}(t) = -\frac{1}{2} v(t)^T \cdot T^{ot} \cdot v(t) - v(t)^T \cdot i^{ot}$$

Dos passos i) e ii) acima tem-se que:

$$T = T^{conf} + T^{ot} \tag{10}$$

$$i^b = i^{conf} + i^{ot} \tag{11}$$

onde os valores de T^{conf} , T^{ot} , i^{conf} e i^{ot} podem ser obtidos através da rede de Hopfield modificada como proposta em Aiyer *et alii* (1990). Esta rede, esquematizada na figura 4, funciona do seguinte modo:

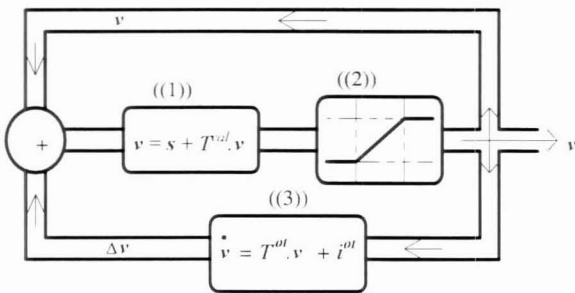


Figura 4: Diagrama de estado da rede de Hopfield modificada

- ((1)) Projecção de $v(t)$ dentro do subespaço válido:

$$v(t) = T^{val} \cdot v(t) + s$$

Esta operação corresponde a uma minimização indireta de $E^{conf}(t)$, isto é, $T^{conf} = T^{val}$ e $i^{conf} = s$.

- ((2)) Aplicação da função rampa simétrica que assegura que $v(t)$ está dentro de um hiper-cubo:

$$v(t) = g_r(v(t))$$

A função rampa simétrica é uma aproximação discreta da função sigmóide:

$$g_r(v_i) = \begin{cases} a_g - b_g & \text{se } v_i > a_g - b_g \\ v_i & \text{se } -b_g \leq v_i \leq a_g - b_g \\ -b_g & \text{se } v_i < -b_g \end{cases} \tag{12}$$

e como esta garante que $v(t) \in [-b_g, a_g - b_g]^n$.

- ((3)) Alteração de $v(t)$ na direção contrária à do gradiente da função de energia $E^{ot}(t)$:

$$-\nabla E(t) = \dot{v}(t) = T^{ot} \cdot v(t) + i^{ot}$$

$$\Delta v = \Delta t \cdot \dot{v}(t)$$

o que garante a minimização desta função.

Nesta rede, cada iteração consiste da aplicação sucessiva das operações ((1)) e ((2)) que confina o vetor de saída $v(t)$ da rede calculado em ((3)) para o subespaço válido. Quando a rede convergir, o ponto de equilíbrio encontrado corresponde a um vértice da região de pertinência paramétrica.

3. CÁLCULO DA REGIÃO DE PERTINÊNCIA PARAMÉTRICA ATRAVÉS DA REDE DE HOPFIELD MODIFICADA

Seja N o número de medidas da saída de um processo modelado pelas equações (1) e (2), o cálculo da região de pertinência paramétrica descrita pelo conjunto de desigualdades lineares em (4), geradas por estas medidas, pode ser mapeado de uma forma geral, por uma rede de Hopfield modificada que resolve o seguinte problema de otimização:

$$\text{minimizar } E^{ot}(\theta) = -\frac{1}{2} \theta^T \cdot T^{ot} \cdot \theta - \theta^T \cdot i^{ot} \tag{13}$$

$$\text{sujeito a } \phi^T \cdot \theta \leq b \tag{14}$$

$$\text{e } c_i^{min} \leq \theta_i \leq c_i^{max} \quad i \in \{1, \dots, n\} \tag{15}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto de vértices do poliedro, $\phi \in \mathbb{R}^n \times 2N$ é uma matriz de variáveis conhecidas inerentes ao processo, $b \in \mathbb{R}^{2N}$ é um vetor de medidas da saída do processo levando em conta os valores dos limites $\delta(t)$ em (2), c_i^{min} e c_i^{max} são valores limites, definindo um intervalo de incerteza paramétrica inicial para cada estimador.

As condições (14) e (15) definem um poliedro convexo limitado como o descrito pela equação (4), dentro do qual o vetor θ deve estar contido se este representa uma solução válida do problema de otimização (13). A solução deste problema pode ser obtida com uma rede de Hopfield modificada cujo subespaço válido garante que as condições definidas em (14) sejam satisfeitas, isto é, $\theta \in M^*(k, \theta)$, enquanto a função objetivo E^{ot} é minimizada. Além disso, o hiper-cubo inicial representado pelas desigualdades dadas em (15) é definido através dos parâmetros a_g e b_g da função rampa simétrica usada como função de ativação da rede. Quando esta rede converge, isto é atinge o equilíbrio estável, os pontos de equilíbrio obtidos correspondem aos vértices procurados para a região de pertinência paramétrica.

Assim o problema de se obter os vértices do poliedro $M^*(k, \theta)$ resume-se a calcular os valores de T e i^b da rede de Hopfield modificada, a partir dos valores de T^{val} , T^{ot} , s e i^{ot} , usando a técnica de subespaço válido de soluções descrita anteriormente, e admitindo E^{ot} dada por (13).

Para obter-se T^{val} e s , primeiro transformam-se as desigualdades lineares em (14) num conjunto de restrições de igualdade através da utilização de uma variável auxiliar $w \in \mathbb{R}^{2N}$:

$$[\phi]_{i1}^T \cdot \theta_1 + [\phi]_{i2}^T \cdot \theta_2 + \dots + [\phi]_{in}^T \cdot \theta_n + \sum_{j=1}^{2N} q_j \cdot w_j = b_i \quad (16)$$

onde $w_j \geq 0$ são variáveis auxiliares que podem ser tratadas como as variáveis θ_i . As variáveis q_j são constantes positivas dadas por:

$$q_j = \begin{cases} 1, & \text{para } j = i \\ 0, & \text{para todo } j \neq i \end{cases} \quad (17)$$

Após esta transformação, o problema de estimação paramétrica robusta pode ser descrito como:

$$\text{minimizar } E^{ot}(\theta) = -\frac{1}{2}(\theta^+)^T \cdot T^{ot} \cdot \theta^+ - (\theta^+)^T \cdot i^{ot} \quad (18)$$

$$\text{sujeito a } (\phi^+)^T \cdot \theta^+ = b^+ \quad (19)$$

$$e \quad c_i^{\min} \leq \theta_i^+ \leq c_i^{\max} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (20)$$

$$e \quad 0 \leq \theta_i^+ \leq c_i^{\max} \quad i \in \{n+1, \dots, N^+\} \quad (21)$$

onde $N^+ = n + 2N$, $\theta^{+T} = [\theta^T \ w^T] \in \mathfrak{R}^{N^+}$ é agora um vetor de variáveis estendidas, e a matriz T^{ot} é tal que E^{ot} não depende das variáveis auxiliares w .

Se as linhas de ϕ^+ são linearmente independentes, então uma solução válida para a equação (19) é dada por:

$$\theta^+ = \phi^+ \cdot \left((\phi^+)^T \cdot \phi^+ \right)^{-1} \cdot b^+ \quad (22)$$

e um subespaço válido para esta rede é dado por:

$$T^{val} = I - \phi^+ \cdot \left((\phi^+)^T \cdot \phi^+ \right)^{-1} \cdot (\phi^+)^T \quad (23)$$

$$s = \phi^+ \cdot \left((\phi^+)^T \cdot \phi^+ \right)^{-1} \cdot b^+ \quad (24)$$

Os valores de T^{ot} e i^{ot} neste caso, são tais que o vetor θ^+ varia na direção contrária à do gradiente da função E^{ot} . Visto que as condições (14) e (15) definem um poliedro convexo limitado como ilustrado na figura 1, então a função de otimização dada pela equação (13) possui um mínimo global. Este caso é sempre verificado se $|T^{ot}| = 0$, e o problema é da classe de otimização linear. Portanto, dado T^{ot} ser nulo, a função E^{ot} em (18) depende apenas do vetor i^{ot} e os vértices do poliedro podem ser calculados através de dois passos principais:

- i-) escolhem-se valores arbitrários para o vetor i^{ot} ,
- ii-) calculam-se os pontos de equilíbrio da rede em relação aos valores escolhidos para o vetor i^{ot} . Estes pontos correspondem aos vértices do politopo.

A utilização de valores arbitrários para o vetor i^{ot} torna a busca dos vértices do politopo muito deficiente. Para melhorar esta busca definem-se duas perspectivas de seleção dos vetores i^{ot} : eixos-direcionados e eixos-hipercúbicos.

Na perspectiva *eixos-direcionados*, os vetores i^{ot} são os vetores unitários que estão na direção direta e inversa a cada eixo paramétrico como na figura 5-a. Sendo “n” a dimensão do espaço paramétrico (ou quantidade de parâmetros a serem estimados), o número de vetores i^{ot} a ser selecionados é $nv_{ed} = 2n$. A utilização desta perspectiva leva ao cálculo imediato dos intervalos de incerteza paramétrica exatos para os estimadores. Isto é, a rede de Hopfield que minimiza E^{ot} através de uma perspectiva eixos-direcionados é um método de estimação robusta que aproxima a região de pertinência paramétrica por uma região ortotópica externa.

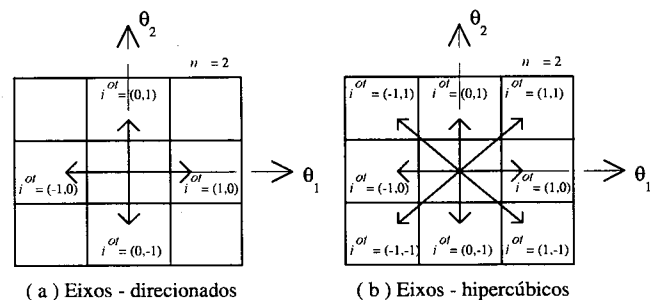


Figura 5: Perspectivas de seleção de i^{ot}

Na perspectiva *eixos-hipercúbicos*, os vetores i^{ot} selecionados são os 2^n vetores unitário que ligam o centro de um ortotopo (hipercubo alinhado com os eixos paramétricos) centrado na origem aos seus próprios vértices e aos centros de suas faces como mostrado na figura 5-b. O número de vetores escolhidos nesta perspectiva é de $nv_{eh} = 2n + 2^n$. Como o método proposto em Mo e Norton (1990), a rede de Hopfield que minimiza E^{ot} através de uma perspectiva eixos-hipercúbicos

Tabela 1: Medidas Simuladas

k	a1(k)	a2(k)	y(k)
1	0.5454	0.0909	1.909
2	0.3721	0.4651	1.5172
3	-0.3809	0.1904	-0.6190
4	0.1342	0.5369	1.8859
5	0.1110	0.3332	1.3332
6	0.3332	0.2222	1.6667
7	0.2000	0.4000	1.8000
8	-0.0667	0.3332	0.6667
9	-0.1250	0.2500	0.5000
10	-0.2857	0.1429	-0.4286

fornece uma descrição politópica da região de pertinência paramétrica. O uso destas perspectivas será ilustrado na seção seguinte onde se aplica a rede de Hopfield proposta na identificação de dois processos.

4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para ilustrar o desempenho e comparar os resultados obtidos, a rede de Hopfield modificada proposta na seção anterior foi utilizada na estimação de regiões de pertinência paramétrica para os seguintes processos:

Processo 1 : Estimação Paramétrica Clássica

$$y(k) = a_1(k) \cdot \theta_1 + a_2(k) \cdot \theta_2 + e(k) \quad (25)$$

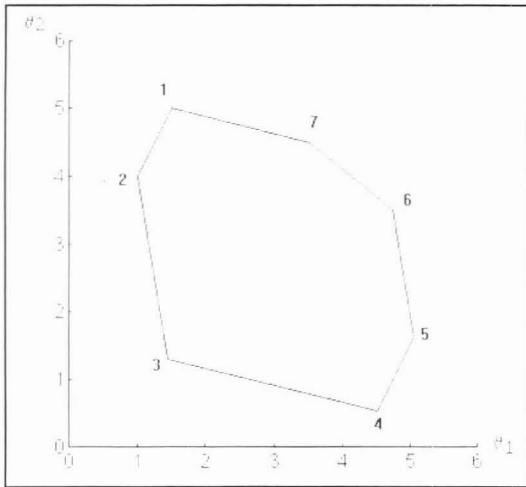


Figura 6: Região de Pertinência Paramétrica calculada com o método politopo exato

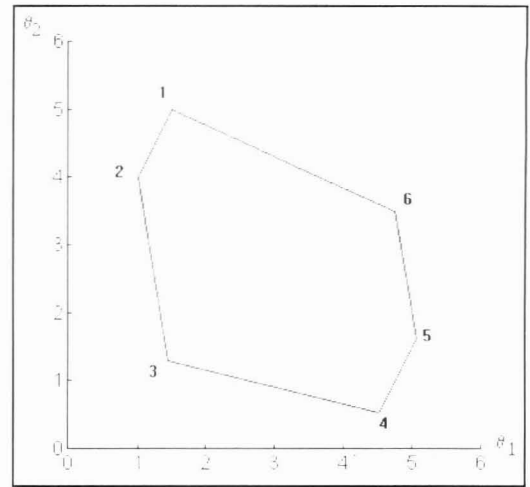


Figura 7: Região de Pertinência Paramétrica calculada com a rede de Hopfield

onde $e(k)$ é uma perturbação aleatória limitada em 1, isto é $\delta(k) = 1$. Os valores simulados da saída $y(k)$ e das variáveis $a_1(k)$ e $a_2(k)$ conhecidas para $k = 1, \dots, 10$ são dados na tabela 1.

Inicialmente usa-se a perspectiva eixos-direcionados na seleção dos vetores i^{ot} . Com isto a rede de Hopfield calcula uma aproximação hipercúbica para a região de pertinência paramétrica. Compara-se o desempenho da rede utilizando-se na estimação do modelo acima, o método do ortotopo externo proposto em Clement e Gentil (1988) que também faz uma aproximação hipercúbica de $M^*(k, \theta)$. Os valores dos vértices calculados com ambos os métodos são mostrados na tabela 2, e os intervalos de incerteza paramétrica são dados na tabela 3. O centro deste hipercubo é considerado o melhor estimador dos parâmetros reais θ_1 e θ_2 , na equação (25).

A aplicação da perspectiva eixos-hipercúbicos para cálculo dos parâmetros da rede de Hopfield modificada levou à estimação do poliedro cujos vértices são apresentados na tabela 4. Para comparação de desempenho, a região de pertinência paramétrica exata para este modelo, pode ser calculada com o método do politopo exato proposto em Mo e Norton (1990). Os vértices para esta região são também dados na tabela 4. Comparando estes valores, nota-se que a rede de Hopfield não foi capaz de estimar um dos vértices de $M^*(k, \theta)$. Isto acontece devido a localização do vértice ser próxima à face ligando os vértices 1 e 6, como mostrado nas figuras 6 e 7. A rede de Hopfield considera assim este vértice como um ponto pertencendo àquela face. Os intervalos de incerteza paramétrica para os estimadores são os mesmos obtidos anteriormente e dados na tabela 2. No entanto, o melhor estimador para os parâmetros reais é agora calculado como sendo o centro de massa do poliedro $M^*(k, \theta)$. Estes estimadores são dados na tabela 5.

Tabela 4: Vértices calculados com a perspectiva eixos-hipercúbicos

Vértices	Rede de Hopfield		Politopo-Exato	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
vértice 1	1.5000	5.0098	1.4995	5.0003
vértice 2	0.9980	4.0009	1.0000	4.0011
vértice 3	1.4510	1.2855	1.4524	1.2870
vértice 4	4.5278	0.5173	4.5116	0.5223
vértice 5	5.0814	1.6490	5.0630	1.6255
vértice 6	4.7497	3.5377	4.7507	3.4994
vértice 7	-	-	3.4995	4.5004

Tabela 5: Centro de massa do poliedro $M^*(k, \theta)$

Estimador	Rede de Hopfield	Politopo-Exato
θ_1	3.0513	3.1109
θ_2	2.6667	2.9194

Processo 2 - Estimação dos parâmetros de modelo ARMAX de quarta ordem (Problema proposto em Ljung (1989)):

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + e(k) \equiv \phi^T(k) \cdot \theta + e(k), \quad k = 1, \dots, 50 \quad (26)$$

where: $y(k)$ é o vetor de medidas.

$u(k)$ é uma sequência binária pseudo-aleatória com amplitude ± 1 .

a_1, a_2, b_1 e b_2 são os parâmetros desconhecidos do modelo.

$e(k)$ é uma sequência desconhecida-mas-limitada representada por uma distribuição Normal $\{N(0,1)\}$.

Os dados foram gerados a partir dos seguintes parâmetros nominais:

$$a_1 = 1.5, \quad a_2 = -0.7, \quad b_1 = 1.0, \quad b_2 = 0.5$$

As tabelas 6 e 7 apresenta-se, os vértices do hipercubo e os intervalos de incerteza paramétrica calculados pela rede de Hopfield utilizando a perspectiva eixos-direcionados. Na tabela 8, o valor do estimador calculado (centro de massa)

Tabela 2: Vértices calculados com a perspectiva eixos-direcionados

vértices	vetores i^{ot}	Rede de Hopfield		Ortotopo Externo	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
vértice 1	(1, 0)	5.0814	1.6490	5.0630	1.6255
vértice 2	(-1, 0)	0.9980	4.0009	1.0000	4.0011
vértice 3	(0, 1)	1.5000	5.0098	1.4995	5.0003
vértice 4	(0, -1)	4.5278	0.5173	4.5116	0.5223

Tabela 3: Intervalos de Incerteza Paramétrica

IIP	Rede de Hopfield			Ortotopo Externo		
	[min, max]	largura	centro	[min, max]	largura	centro
θ_1	[0.9980, 5.0814]	4.0834	3.0397	[1.0000, 5.0630]	4.0630	3.0315
θ_2	[0.5173, 5.0098]	4.4925	2.7636	[0.5223, 5.0003]	4.4780	2.7613

utilizando a perspectiva eixos-hipercúbicos é comparado com os resultados do método politopo-exato. Nesta tabela, a coluna "Erro H-P" é o erro relativo entre o estimador da rede de Hopfield e o estimador do método politopo-exato; a coluna "Erro H-N" é o erro relativo entre o estimador da rede de Hopfield e os parâmetros nominais do modelo, e a coluna "Erro P-N" é o erro relativo entre o estimador do método politopo-exato e os parâmetros nominais do modelo.

Estes resultados ilustram o bom desempenho da rede de Hopfield modificada com parâmetros internos calculados utilizando a técnica de subespaço válido de soluções na estimação de regiões de pertinência paramétrica para modelos lineares. De acordo com a direção de busca (perspectivas) imposta pela escolha dos vetores i^{ot} , esta rede opera como o método do ortotopo externo (Clement e Gentil, 1988), ou como o método do politopo exato (Mo e Norton, 1990).

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho mostrou-se como é possível resolver problemas de Estimação Paramétrica Robusta através de técnicas de Redes Neurais Artificiais. Uma rede de Hopfield modificada é proposta cujos pontos de equilíbrio correspondem aos vértices de uma região de pertinência paramétrica para os parâmetros de um modelo linear. Duas perspectivas de seleção dos valores do vetor i^{ot} foram definidas para o cálculo dos parâmetros desta rede. A perspectiva eixos-direcionados é utilizada para caracterizar os intervalos de incerteza paramétrica associados com cada parâmetro a ser estimado. A perspectiva eixos-hipercúbicos é utilizada quando é necessário obter uma representação politópica exata da região de pertinência paramétrica.

Como continuação deste trabalho investiga-se atualmente a utilização da rede proposta em aplicações em tempo real, e também, topologias de RNA na estimação de regiões de pertinência paramétrica para modelos não-lineares. Para este caso, o cálculo de tais regiões pode ser visto como a aplicação de uma RNA na solução de um problema de otimização não-linear. Neste caso, o algoritmo de aprendizagem a ser usado deve ser tal que permita a rede utilizada, o mapeamento de regiões não-convexas e possivelmente não conectadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aiyer, S. V. B., M. Niranja & F. Fallside (1990). A Theoretical Investigation into the Performance of the Hopfield Model. *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol 1, pp 53 - 60.
- Arruda, L. V. R. (1992). Etude d'algorithmes d'estimation robuste et développement d'un système à base de connaissance pour l'identification. Thèse de Doctorat, Université de Nice, Sophia Antipolis, France.
- Broman, V. & M.S. Shensa (1986). Polytopes, a Novel Approach to Tracking. in *Proc. 25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, GRECE, pp 1749 - 1752.
- Clement, T & S. Gentil (1988). Reformulation of Parameter Identification with Unknown-But-Bounded Errors. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol 30, pp 257-270.
- Fogel, E. & Y.F. Huang (1982). On the Value of Information in System Identification: Bounded Noise Case. *Automatica*, vol 18, n°2, pp 229-238.
- Ljung, L. (1989). *System Identification: Theory for the user*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Goodwin, G. C., & R.L. Payne (1977). *Dynamic System Identification*. Academic Press, USA.
- Mo, S. H. & J.P. Norton (1990). Fast and Robust Algorithm to Compute Exact Polytope Parameter Bounds. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol 32, pp 481 - 493.
- Norton, J. P. (1989). Recursive Computation of Inner Bounds for the Parameter of Linear Models. *Int Journal of Control*, vol 50, n°6, pp 2423 - 2430.

Silva, I. N. (1995). Estimação Paramétrica Robusta Através de Redes Neurais Artificiais. Tese de mestrado, UNICAMP, Campinas - SP.

Vicino, A. & M. Milanese (1989). Optimal Inner Bounds of Feasible Parameter Set in Linear Estimation with Bounded Noise. in Proc. 28th IEEE Conf. on Decision and Control, Tampa, USA, pp 2576 - 2580.

Tabela 6: Vértices calculados com a perspectiva eixos-direcionados

Vértice	vetores i^{or}	Rede de Hopfield				Ortotopo Externo			
		a_1	a_2	b_1	b_2	a_1	a_2	b_1	b_2
vértice 1	(1, 0, 0, 0)	1.2964	-0.5975	0.9963	0.5521	1.3084	-0.6004	0.9927	0.5466
vértice 2	(-1, 0, 0, 0)	1.6415	-0.8170	1.0960	0.2397	1.6296	-0.8158	1.0962	0.2433
vértice 3	(0, 1, 0, 0)	1.6309	-0.8272	1.0939	0.2416	1.6296	-0.8158	1.0955	0.2433
vértice 4	(0, -1, 0, 0)	1.3146	-0.5596	1.1478	0.7995	1.3171	-0.5782	1.1246	0.7645
vértice 5	(0, 0, 1, 0)	1.4016	-0.6539	0.6837	0.5358	1.3994	-0.6522	0.7092	0.5405
vértice 6	(0, 0, -1, 0)	1.4021	-0.6259	1.3610	0.7388	1.4109	-0.6404	1.3302	0.6922
vértice 7	(0, 0, 0, 1)	1.6240	-0.7960	1.1354	0.1325	1.6221	-0.7959	1.1332	0.1642
vértice 8	(0, 0, 0, -1)	1.3136	-0.5536	1.2119	0.9055	1.3341	-0.5802	1.0543	0.7669

Tabela 7: Intervalos de Incerteza Paramétrica

IIP	Rede de Hopfield			Ortotopo-Externo		
	[min , max]	largura	centro	[min , max]	largura	centro
a_1	[1.2964 , 1.6415]	0.3451	1.4690	[1.3084 , 1.6296]	0.3212	1.4544
a_2	[-0.8272 , -0.5596]	0.2676	-0.6934	[-0.8158 , -0.5782]	0.2376	-0.6967
b_1	[0.6837 , 1.3610]	0.6773	1.0223	[0.7092 , 1.3302]	0.6210	1.0354
b_2	[0.1325 , 0.9055]	0.7730	0.5090	[0.1642 , 0.7669]	0.6027	0.4432

Tabela 8: Centro de massa do poliedro $M^*(k, \theta)$ e Erros Relativos

Estimador	Rede de Hopfield	Politopo-Exato	Erro H-P	Erro H-N	Erro P-N
a_1	1.4656	1.4544	0.770 %	2.293 %	3.040 %
a_2	-0.6858	-0.6967	1.565 %	2.029 %	0.471 %
b_1	1.0645	1.0354	2.811 %	6.450 %	3.540 %
b_2	0.4768	0.4432	7.581 %	4.640 %	11.360 %