
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONVERSORES ESTÁTICOS MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ DINÂMICA

Ana Rosa de Jesus Silva

Denizar Cruz Martins

Universidade Federal de Santa Catarina

CTC - EEL - INEP

Cx. Postal: 5119

88.040-970 - Florianópolis - Santa Catarina

Tel.: (048) 231-9204 FAX: (048) 231-9770

e.mail: inep@inep.ufsc.br

Resumo: O trabalho apresentado neste artigo refere-se ao emprego de uma técnica que permite reduzir o tempo de cálculo na simulação numérica, sem *a priori*, de conversores estáticos de potência. A técnica empregada consiste na diagonalização da matriz dinâmica A . Este método conduz a uma solução analítica bastante simples, permitindo uma expressiva redução no tempo gasto no cálculo da exponencial de matriz. Foram realizadas simulações para comprovação da validade do algoritmo proposto.

Palavras-chaves: Simulação, conversores estáticos, diagonalização, autovalores e autovetores.

Numerical Simulation Of Power Static Converters Dynamic Matrix Diagonalization Method

Abstract : This paper deals with the use of a method that allows the reduction of the exponential of matrix calculation applied to numerical simulation, without *a priori*, of power static converters. The technique consists of dynamic matrix A diagonalization. This method leads to a simple analytic solution, allowing a reduction on the calculating time. A simplified algorithm of the method is presented and its validity is verified by computer simulation of various structures.

Keywords: Simulation, static converters, diagonalization, eigenvalues and eigenvectors.

1- Introdução

É comum representar sistemas em engenharia sob a forma de estado, ou seja, um sistema de equações diferenciais de

primeira ordem. Essa representação é particularmente importante por dois motivos:

- bem adaptada ao tratamento numérico de circuitos elétricos;
- possibilidade de representação de qualquer sistema físico linear.

A literatura propõe vários métodos para solucionar sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Dentre eles estão incluídos os métodos de integração de etapa única do tipo Runge-Kutta de quarta ordem e os métodos de múltiplas etapas do tipo Adams-Moulton. O grande inconveniente na aplicação desses métodos em cálculo numérico reside no fato de se escolher como valor do passo de cálculo uma fração da menor constante de tempo do sistema (Bordry, 1985). Esse procedimento implica em um aumento considerável do tempo de cálculo e dos pontos de simulação tomando, para certos casos impraticável a aplicação desses métodos.

A utilização do passo de cálculo variável é particularmente importante por permitir a obtenção de resultados com uma boa precisão sem solicitar grandes esforços do usuário. Essa técnica permite a otimização do número de pontos de cálculo assegurando a observação de toda a dinâmica do sistema.

Na aplicação da técnica do passo variável, este é escolhido automaticamente em função da dinâmica do sistema a ser simulado. Com o emprego dessa técnica o passo de cálculo pode assumir valores relativamente grandes, provocando um defasamento nos resultados. Para contornar esse inconveniente, foi proposta a transformação do sistema original em um sistema autônomo, integrando o vetor de entrada ao vetor de estado (sistema de estado expandido).

As vantagens introduzidas pela geração de um sistema de estado expandido (Martins, D. C. 1988) são: solução

Artigo submetido em :17/07/95

1ª revisão em : 27/11/95 2ª revisão em :20/09/96

Aceito por recomendação do Ed. Consultor Prof.Dr.Edson H. Watanabe

independente do vetor de entrada e simplicidade de implementação a nível de computador.

Estudos anteriores, indicam que o tempo despendido no cálculo das exponenciais de matrizes representa cerca de 40% do tempo total de simulação. Este tempo se torna mais crítico, quando o cálculo da exponencial de matriz é feito a partir da matriz de estado expandido. Por esta razão justifica-se o interesse no desenvolvimento de métodos alternativos para a determinação da exponencial da matriz dinâmica. O método proposto consiste na diagonalização da matriz dinâmica. Esta técnica leva a uma solução analítica simples, permitindo uma melhoria no tempo de cálculo. Além disso, esse método permite a redução na ordem do sistema durante a simulação.

2- Método da Exponencial da Matriz Dinâmica

Os circuitos elétricos a semicondutores de potência são na realidade sistemas não-lineares. A consideração dos elementos passivos (resistências, indutâncias próprias e mútuas e capacitâncias) como invariantes no tempo e ainda a representação dos semicondutores sob a forma de uma resistência binária (bloqueado \Rightarrow valor elevado; em condução \Rightarrow valor baixo) possibilita a modelagem de qualquer conversor estático por um sistema linear por partes.

Nos programas de simulação numérica sem a priori (SAP) de conversores estáticos o conhecimento da topologia, do circuito, dos valores de seus componentes e das ordens de comando dos interruptores controlados permite determinar o sistema de equações diferenciais do circuito.

O método empregado é capaz de definir as equações do circuito sob a forma de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (01)$$

onde, $x(t)$: vetor de estado

$u(t)$: vetor de entrada;

$y(t)$: vetor de saída.

As matrizes A , B , C e D são calculadas a partir da topologia e dos valores dos componentes do circuito. Estas matrizes permanecem constantes durante uma dada configuração do circuito.

A solução de um sistema de equações diferenciais lineares invariante no tempo pode ser expressa sob a forma de um sistema discreto equivalente:

$$x[(k+1) \cdot T] = e^{A \cdot T} \cdot x(k \cdot T) + e^{A \cdot T} \cdot \int_0^T e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau + k \cdot T) \cdot d\tau \quad (02)$$

sendo, $kT = t_0$;

$(k+1)T = t$;

T : passo de cálculo.

Os problemas associados à solução desse sistema podem ser divididos em três partes:

a) solução da matriz de comando discreta:

$$G[T, u(t)] = e^{A \cdot T} \cdot \int_0^T e^{-A \cdot \tau} \cdot B \cdot u(\tau + t_0) \cdot d\tau$$

b) escolha do passo de cálculo;

c) Cálculo da exponencial de matriz: $e^{A \cdot T}$.

Este trabalho se concentrará nos itens a) e b), tendo em vista que o item c) já foi exaustivamente testado e consolidado (Schonek, 1977).

2.1 Matriz de Comando Discreta $G[T, u(t)]$ (Chua & Lin, 1975)

A princípio, como os autovalores da matriz A são todos negativos ou com parte real negativa, o passo de cálculo T pode ser escolhido arbitrariamente. Pois ele representa apenas um passo de observação, que permite seguir a evolução das diferentes variáveis de estado do sistema. Ao contrário do passo de cálculo dos métodos iterativos, ele não necessita estar ligado à menor constante de tempo do circuito.

A solução da matriz de comando discreta pode ser facilmente obtida nos seguintes casos:

a) $u(t)$ é constante por partes, tal que:

$$u(t) = u(k \cdot T), \quad \forall t \in [k \cdot T, (k+1) \cdot T]; \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

assim:

$$G[T, u(t)] = [e^{A \cdot T} - I] \cdot A^{-1} \cdot B \cdot u(k \cdot T) \quad (03)$$

onde I : matriz identidade;

A : matriz não singular.

Nestas condições a equação (2) pode ser escrita como segue-se:

$$x[(k+1) \cdot T] = e^{A \cdot T} \cdot x(k \cdot T) + [e^{A \cdot T} - I] \cdot A^{-1} \cdot B \cdot u(k \cdot T) \quad (04)$$

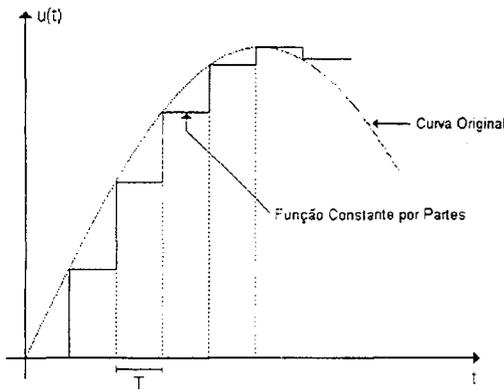


Fig. 1: Aproximação de uma fonte senoidal por uma função constante por partes.

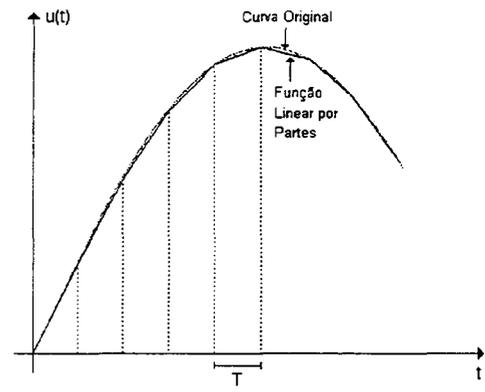


Fig. 2: Aproximação de uma fonte senoidal por uma função linear por partes.

b) $u(t)$ é contínua por partes, tal que:

$$u(t) = u(k \cdot T) + \frac{\{u[(k+1) \cdot T] - u(k \cdot T)\}}{T} \cdot (t - k \cdot T) \quad (05)$$

$$\forall t \in [k \cdot T, (k+1) \cdot T]; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dessa forma, obtém-se:

$$\mathbf{G}[T, \mathbf{u}(t)] = \mathbf{G}_1(T) \cdot \mathbf{u}(k \cdot T) + \mathbf{H}_1(T) \cdot \mathbf{u}[(k+1) \cdot T] \quad (06)$$

onde:

$$\mathbf{G}_1(T) = [e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot (\mathbf{A} \cdot T - \mathbf{I}) + \mathbf{I}] \cdot (\mathbf{A} \cdot T)^{-2} \cdot \mathbf{B} \cdot T \quad (07)$$

$$\mathbf{H}_1(T) = [e^{\mathbf{A} \cdot T} - \mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot T] \cdot (\mathbf{A} \cdot T)^{-2} \cdot \mathbf{B} \cdot T \quad (08)$$

como resultado final encontra-se:

$$\mathbf{x}[(k+1) \cdot T] = e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + \mathbf{G}_1(T) \cdot \mathbf{u}(k \cdot T) + \mathbf{H}_1(T) \cdot \mathbf{u}[(k+1) \cdot T] \quad (09)$$

As soluções propostas não apresentam restrições no que concerne ao emprego de fontes invariantes no tempo. Entretanto, para fontes variáveis (em particular senoidais), estas são representadas por pequenos patamares de duração igual ao passo de cálculo (Fig. 1), ou então por uma seqüência de cordas (Fig. 2).

O efeito produzido pela aproximação representada na Fig. 1 é no sentido de provocar um defasamento entre a curva calculada e a curva analítica. Esse efeito é tão mais pronunciado quanto maior for o passo de cálculo. Para contornar esse problema define-se um passo de cálculo máximo de 1/200 do período da fonte alternada (Schonek, 1977), para que o erro não exceda a 3% do valor máximo da fonte. No caso de uma aproximação por uma função linear por partes (Fig. 2), pode-se escolher um passo de cálculo maior, em torno de 1/50 do período, para manter o mesmo erro. Contudo, neste caso seria necessário calcular e armazenar o equivalente a duas matrizes de comando discreta.

As soluções apresentadas, embora conduzam a resultados satisfatórios, penalizam sobremaneira o tempo de cálculo do sistema, tendo em vista que haverá uma quantidade de pontos calculados desnecessariamente. Portanto, elas são inadequadas à aplicações em programas que empregam a técnica do passo de cálculo variável, a qual tem como objetivo otimizar o número de pontos calculados. O problema pode tomar proporções incontroláveis no momento em que o passo variável assume valores relativamente grandes, comprometendo a precisão das curvas.

A solução proposta consiste em integrar o vetor de entrada dentro do vetor de estado, transformando o sistema original (Eq. 1) em um sistema autônomo, cuja resposta não é afetada diretamente pelo vetor $\mathbf{u}(t)$.

2.2- Determinação de um Sistema de Equações Autônomo

A proposta consiste em considerar o vetor $\mathbf{u}(t)$ como saída de um sistema linear autônomo, definido por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{x}_a(t) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_a \cdot \mathbf{x}_a(t) \end{cases} \quad (10)$$

Esta é uma hipótese não restritiva, haja vista que $u(t)$ pode ser qualquer função do tipo exponencial, senoidal, polinomial ou uma combinação entre elas. A dificuldade básica se encontra na determinação adequada do vetor $x_a(t)$.

A determinação das matrizes A_a e C_a depende essencialmente da natureza das fontes de alimentação. Normalmente, a alimentação de conversores estáticos de potência é realizada por fontes de excitação senoidal e/ou contínua. Isso facilita a construção das matrizes A_a e C_a .

Com o objetivo de se obter um sistema linear autônomo realizou-se a integração do vetor de entrada dentro do vetor de estado. Transformando o sistema de estado original equação (1) em um sistema autônomo (Balabanian & Bickart, 1979), definido a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e \cdot x_e(t) & (a) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) & (b) \end{cases} \quad (11)$$

onde:

$$A_e = \begin{bmatrix} A & B \cdot C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \quad x_e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$

O sistema de estado expandido é autônomo, portanto, a sua solução discretizada é dada por:

$$x_e[(k+1) \cdot T] = e^{A_e \cdot T} \cdot x_e(k \cdot T) \quad (12)$$

A ordem da matriz A_e é $(n + m)$, sendo “n” a ordem do sistema original (Eq. 1) e “m” a ordem do sistema autônomo (Eq. 10). Na realidade, a ordem do sistema original é aumentada em “um” para todas as fontes contínuas e em “dois” para todas as fontes senoidais de mesma frequência. Na maioria dos problemas de natureza prática envolvendo conversores estáticos de potência “m” raramente é maior do que “três” (excepcionalmente “cinco”).

2.3- Determinação do Passo de Cálculo

Tendo como objetivo aperfeiçoar, não só a precisão dos resultados, mas também o tempo de cálculo, foi desenvolvido um método computacional usando passo de cálculo variável. O passo de cálculo é obtido a partir das constantes de tempo da matriz dinâmica A do sistema. Essas constantes de tempo são calculadas usando os autovalores de A.

Assim a determinação dos autovalores de A é de suma importância em um método computacional a passo variável. Para obtenção dos autovalores de A foi utilizado o algoritmo QR (Chua & Lin, 1975, Pottle, 1969) com redução pela matriz de Hessenberg.

Na determinação dos autovalores, dois casos são possíveis:

a) Autovalor Real

Para um autovalor λ_r , real, a determinação do passo de cálculo T é feita da seguinte maneira:

$$T = \frac{1}{k \cdot |\lambda_r|} \quad (13)$$

onde k depende da precisão desejada (escolhido entre 3 e 5).

b) Autovalor Complexo

No caso de autovalor complexo conjugado $(\lambda, \bar{\lambda})$ a escolha do passo de cálculo T é realizada tal como indicada na equação abaixo:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{k \cdot |\text{Im}(\lambda)|} \quad (14)$$

sendo:

$$20 \leq k \leq 50;$$

$\text{Im}(\lambda)$: parte imaginária de λ .

2.3.1 Minimização e Maximização da Tabela de Passo de Cálculo

Devido a modelagem resistiva dos semicondutores, é possível obter constantes de tempo extremamente pequenas (constantes de tempo parasitas) (Kassakian, 1979), que estão ligadas aos interruptores bloqueados (grande resistência - $M\Omega$). Devido aos valores irrisórios dessas constantes de tempo, a evolução do sistema se processa muito lentamente, de tal forma que o seu estado não sofre mudanças visíveis. Consequentemente tem-se um aumento no tempo de simulação.

Constata-se que tais constantes de tempo podem ser eliminadas sem afetar os resultados da simulação. Foi estabelecido então, um passo de cálculo mínimo (T_{min}), obtido a partir de um processo empírico (Bordry, 1985). Todas as constantes de tempo abaixo de T_{min} são desconsideradas.

Observa-se claramente, que a minimização da tabela do passo de cálculo é um problema ligado unicamente ao tempo de simulação. Contudo, a sua maximização está ligada a precisão das curvas. A determinação do passo de cálculo máximo (T_{max}), depende da natureza das fontes. Para fontes alternadas senoidais a escolha de T_{max} é feita da maneira seguinte:

$$T_{max} = \frac{\min[\text{período das fontes}]}{k} \quad (15)$$

onde min: valor mínimo;

$$20 \leq k \leq 50.$$

No caso de fontes contínuas, tem-se:

$$T_{max} = [T_{final} - T_{inicial}] \quad (16)$$

sendo:

T_{final} : tempo final de simulação;

$T_{inicial}$: tempo inicial de simulação.

2.4 Método da Diagonalização da Matriz Dinâmica

A utilização de um programa a passo variável é particularmente importante por permitir a otimização do número de pontos de cálculo assegurando a observação, com boa precisão, de toda a dinâmica do sistema (Martins, 1986). Contudo, a aplicação do algoritmo do passo de cálculo variável não é suficiente para acelerar o processo, devido aos cálculos adicionais ligados à determinação dos autovalores da matriz dinâmica expandida (A_e).

A proposta apresentada consiste na aplicação do método da diagonalização da matriz A_e (Silva, 1989), de forma a reduzir o tempo de cálculo despendido nessa operação.

Partindo do sistema de equações de estado expandido (11.a) e aplicando uma matriz de transformação Q , obtém-se:

$$\dot{x}_e(t) = Q \cdot z(t) \quad (17)$$

onde

$z(t)$: novo vetor de estado.

Aplicando a equação (17) em (11.a), obtém-se:

$$Q \cdot \dot{z}(t) = A_e \cdot Q \cdot z(t) \quad (18)$$

ou seja:

$$\dot{z}(t) = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q \cdot z(t) \quad (19)$$

Tomando:

$$A_d = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q \quad (20)$$

então

$$\dot{z}(t) = A_d \cdot z(t) \quad (21)$$

O método da diagonalização da matriz A_e baseia-se na determinação dos seus autovalores e autovetores. A matriz de transformação linear Q é escolhida de tal forma que as suas colunas sejam compostas por autovetores de A_e (Chen, C. T. 1970). Se a matriz Q é não singular, diz-se que as matrizes A_e e A_d são semelhantes e admitem os mesmos autovalores. Como os autovalores das duas matrizes são idênticos, pode-se dizer que a precisão das formas de onda de saída ficam inalteradas durante a diagonalização.

* Autovalores Reais e Distintos

Neste caso A_d é uma matriz diagonal, cujos elementos são os autovalores da matriz A_e .

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde:

λ_i : autovalores de A_e ;

$i = 1, 2, \dots, n$.

O cálculo da exponencial de matriz reduz-se ao seguinte:

$$e^{A_d \cdot T} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot T} & & & \\ & e^{\lambda_2 \cdot T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n \cdot T} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Logo:

$$e^{A_e \cdot T} = Q \cdot e^{A_d \cdot T} \cdot Q^{-1} \quad (24)$$

Verifica-se que as colunas da matriz transformação Q são os autovetores associados aos autovalores que compõem a matriz A_d .

* Autovalores Reais e nem Todos Distintos

Neste caso a matriz A_d toma a forma da matriz quase-diagonal de Jordan:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

sendo

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{j_1} & & & \\ & \mathbf{A}_i^{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_i^{j_n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

n : número de autovalores distintos;

Os blocos de Jordan $\mathbf{A}_i^{j_p}$ são dados por:

$$\mathbf{A}_i^{j_p} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

p : dimensão do bloco correspondente à multiplicidade do autovalor.

A exponencial da matriz \mathbf{A}_d é calculada da seguinte forma:

$$e^{\mathbf{A}_d T} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 T} & & & \\ & e^{\mathbf{A}_2 T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mathbf{A}_n T} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Sendo que a exponencial de cada bloco de Jordan é dada da seguinte maneira:

$$e^{\mathbf{A}_i T} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i T} & t \cdot e^{\lambda_i T} & \dots & \frac{t^{(j-2)} \cdot e^{\lambda_i T}}{(j-2)!} & \frac{t^{(j-1)} \cdot e^{\lambda_i T}}{(j-1)!} \\ & e^{\lambda_i T} & \dots & \frac{t^{(j-3)} \cdot e^{\lambda_i T}}{(j-3)!} & \frac{t^{(j-2)} \cdot e^{\lambda_i T}}{(j-2)!} \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_i T} & \frac{t \cdot e^{\lambda_i T}}{1!} \\ & & & & e^{\lambda_i T} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A partir da Eq. (28) aplica-se a Eq. (24), a fim de determinar-se $e^{\mathbf{A}_i T}$.

* Autovalores Complexos e Distintos

Nesta situação, a matriz diagonal é dada da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \sigma_1 + j\omega_1 & & & \\ & \sigma_1 - j\omega_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m + j\omega_m \\ & & & & \sigma_m - j\omega_m \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\sigma_i \pm j\omega_i$: Autovalor complexo conjugado;

$i = 1, 2, \dots, m$.

A aplicação de uma transformação suplementar sobre a atual matriz diagonal \mathbf{A}_d tem como objetivo transformá-la em uma matriz real diagonal por blocos (Silva, 1989). Assim obtém-se:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m & \omega_m \\ & & & -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (31)$$

A exponencial de \mathbf{A}_d adquire a seguinte forma:

$$e^{A_d T} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 T} \cos(\omega_1 T) & e^{\sigma_1 T} \sin(\omega_1 T) & & \\ -e^{\sigma_1 T} \sin(\omega_1 T) & e^{\sigma_1 T} \cos(\omega_1 T) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\sigma_m T} \cos(\omega_m T) & e^{\sigma_m T} \sin(\omega_m T) \\ & & & -e^{\sigma_m T} \sin(\omega_m T) & e^{\sigma_m T} \cos(\omega_m T) \end{bmatrix} \quad (32)$$

De posse de $e^{A_d T}$ aplica-se a transformação inversa W para obter $e^{A_c T}$. Assim:

$$e^{A_c T} = W \cdot e^{A_d T} \cdot W^{-1} \quad (33)$$

onde: $W = Q \cdot S$

sendo S definido da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & & \\ 1 & j & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & -j \\ & & & 1 & j \end{bmatrix} \quad (34)$$

* Autovalores Complexos e nem Todos Distintos

Nesta situação, nem sempre é possível encontrar uma representação matricial diagonal, sendo quase sempre necessário a utilização de autovetores generalizados para encontrar a forma canônica de Jordan:

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde:

$$A_{\lambda_k} = \begin{bmatrix} A_{\lambda_k}^{j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_k}^{j_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\lambda_k}^{j_{u_i}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

sendo $k = 1, \dots, n$.

$$A_{\lambda_i}^{j_i} = \begin{bmatrix} \sigma_i + j\omega_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_i + j\omega_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i + j\omega_i \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde

$\sigma_i + j\omega_i$: Autovalor complexo;

$i = 1, 2, \dots, n$;

$u_i = \dim(A_{\lambda_i}^{j_i})$.

Para evitar trabalhar com números complexos aplica-se uma transformação sobre a matriz canônica de Jordan, a fim de obter uma matriz real. Então o bloco de Jordan transforma-se no seguinte:

$$A_{\lambda_i}^{j_i} = \begin{bmatrix} \sigma_i & 1 & \dots & 0 & \omega_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_i & \dots & 0 & 0 & \omega_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i & 0 & 0 & \dots & \omega_i \\ -\omega_i & 1 & \dots & 0 & \sigma_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_i & \dots & 0 & 0 & \sigma_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_i & 0 & 0 & \dots & \sigma_i \end{bmatrix} \quad (38)$$

A exponencial do bloco de Jordan adquire a seguinte forma:

$$e^{A_{\lambda_i}^{j_i} t} = \begin{bmatrix} EA_i^u & EB_i^u \\ -EB_i^u & EA_i^u \end{bmatrix} \quad (39)$$

sendo:

$$EA_i^u = \begin{bmatrix} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) & \frac{t e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t)}{1!} & \dots & \frac{t^{u-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t)}{(u-1)!} \\ 0 & e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) & \dots & \frac{t^{u-2} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t)}{(u-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$EB_i^u = \begin{bmatrix} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) & \frac{t e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)}{1!} & \dots & \frac{t^{u-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)}{(u-1)!} \\ 0 & e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) & \dots & \frac{t^{u-2} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)}{(u-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

De posse da exponencial de A_j^* aplica-se a transformação inversa T para obter $e^{A_c T}$. Assim:

$$e^{A_c T} = T \cdot e^{A_j^*} \cdot T^{-1} \quad (42)$$

onde: $T = Q \cdot S$

Q : é uma matriz composta pelos autovetores generalizados de A_c .

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_n \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$S_i = \begin{bmatrix} S_i^u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_i^v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_i^z \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$S_i^u = \begin{bmatrix} I^u & jI^u \\ -jI^u & I^u \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde I : matriz identidade;

u : dimensão do bloco de Jordan associado.

2.4.1. Redução da Ordem do Sistema (Assini, 1987)

As vantagens essenciais do método de diagonalização são: obter novas variáveis de estado desacopladas entre si e determinar uma expressão analítica da solução do sistema de equações diferenciais. Essas vantagens permitem reduzir a ordem do sistema durante a simulação, contribuindo para a diminuição do tempo de cálculo.

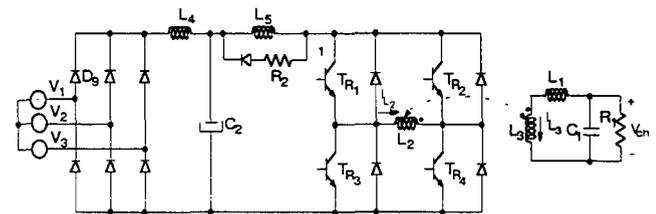
As novas variáveis de estado obtidas através da diagonalização da matriz dinâmica A do sistema, são independentes entre si, permitindo reduzir a ordem do sistema à medida que a constante de tempo associada ao autovalor atinja o regime permanente. Neste momento, a simulação é continuada, e considerando este modo constante até a próxima mudança de configuração.

A principal dificuldade na implementação deste algoritmo consiste na determinação com boa precisão, dos autovalores e autovetores da matriz de dinâmica expandida A_c . Essa dificuldade está ligada à grande dispersão das constantes de tempo, causada pela escolha do modelo resistivo binário para os semicondutores.

3. Exemplo de Simulação

Este parágrafo tem como principal objetivo mostrar o desempenho do método da diagonalização da matriz dinâmica. Como exemplo ilustrativo será mostrada a simulação de um inversor monofásico em ponte a transistor. Os resultados da simulação para os três primeiros períodos são mostrados na figura 4.

Para esta estrutura em particular, o ganho em tempo no cálculo da exponencial foi de 93% em relação ao método de simulação a passo variável sem diagonalização da matriz dinâmica.



$C_1 = 290 \mu\text{F}$
 $C_2 = 2 \text{ mF}$
 $R_1 = 4,4 \Omega$
 $R_2 = 3 \Omega$
 $L_1 = 10 \mu\text{H}$

Transformador:
 $L_2 = 1 \text{ H}$
 $L_3 = 255 \text{ mH}$
 $M_{23} = 500 \text{ mH}$

Fig. 3: Inversor monofásico em ponte a transistor.

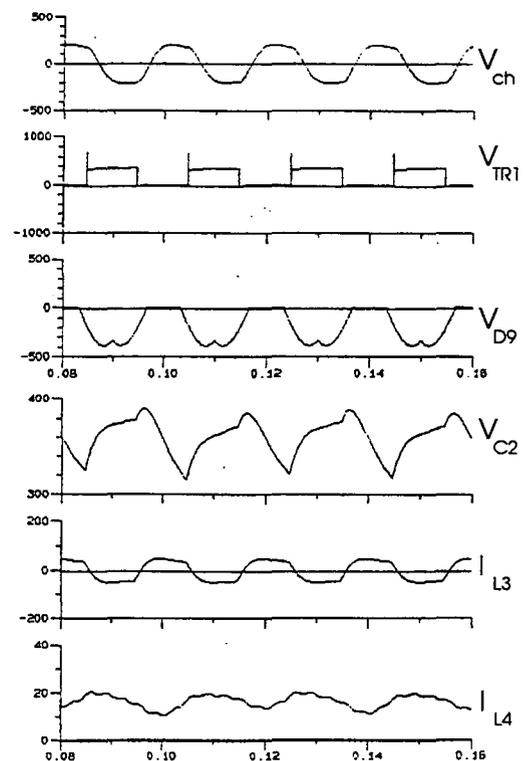


Fig. 4: Formas de onda em regime permanente.

Várias outras estruturas foram analisadas, entre elas pode-se citar:

- a) Inversor monofásico em ponte a transistor;
- b) Gradador trifásico com circuito de proteção;
- c) Gradador trifásico sem circuito de proteção;
- d) Inversor de Mac-Murray;
- e) Chopper a tiristor;
- f) Conversor E-I quase ressonante;
- g) Conversor DC-DC a ressonância;
- h) Retificador trifásico a tiristor;
- i) Retificador trifásico a diodo.

Estruturas	Técnicas	
	1	2
a	3m, 10s, 64c	3m, 06s, 84c
b	8m, 24s, 21c	7m, 02s, 32c
c	1m, 18s, 21c	1m, 19s, 79c
d	40s, 85c	35s, 81c
e	1m, 26s, 50c	39s, 49c
f	16s, 10c	15s, 36c
g	4m, 27s, 98c	2m, 35s, 54c
h	3m, 00s, 98c	1m, 34s, 96c
i	3m, 27s, 83c	1m, 41s, 45c

Uma comparação foi realizada com relação a dois métodos de simulação numérica:

- 1) Método a passo variável, com sistema de estado autônomo;
- 2) Método a passo variável, com sistema de estado autônomo empregando a técnica da diagonalização da matriz dinâmica.

A tabela seguinte mostra o tempo despendido no cálculo da exponencial de matriz para ambos os métodos:

Tab. 1: Comparação entre o tempo de cálculo da exponencial de matrix.

Estruturas	Técnicas		Ganho em Tempo (%)
	1	2	
a	20s, 5c	1s, 38c	93
b	1m, 5s, 67c	82c	99
c	10s, 21c	52c	95
d	10s, 5c	79c	92
e	55s, 14c	73c	99
f	3s, 43c	21c	94
g	1m, 38s, 65c	32c	99
h	2m, 9s, 57c	76c	99
i	2m, 16s, 10c	73c	99

Tab. 2: Comparação entre o tempo total de cálculo

A partir de Tab.1, verifica-se que para as estruturas analisadas houve, em média, um ganho em tempo de cálculo da exponencial de matriz de cerca de 97% em relação ao método da diagonalização. Esses dados revelam que o objetivo pretendido foi alcançado.

Embora o ganho no cálculo da exponencial de matriz seja bastante significativo, o tempo total de simulação gasto no método da diagonalização da matriz dinâmica é apenas 25% mais rápido que o método tradicional (método 1). A principal causa desse problema se encontra no tempo despendido nos cálculos dos autovalores e autovetores da matriz A_c , cuja determinação é imprescindível para aplicação do algoritmo proposto.

4. Conclusão

O método de simulação proposto emprega a técnica da diagonalização da matriz dinâmica como artifício para acelerar o cálculo da exponencial de matriz. Esta técnica leva a uma solução analítica simples, permitindo uma diminuição no tempo de cálculo, sem no entanto diminuir a precisão das formas de onda de saída.

Esse método conduz a novas variáveis de estado independentes entre si. Possibilitando uma redução na ordem do sistema, a medida que a constante de tempo associada ao autovalor atinja o regime permanente.

O programa desenvolvido constitui-se em uma ferramenta na pesquisa e estudo de associações de conversores estáticos. Os resultados apresentados evidenciam a eficiência e as vantagens do "software" proposto.

A diversidade das aplicações apresentadas e o crescimento gradual da complexidade das estruturas a semicondutores, permitem demonstrar claramente o interesse de dispor de um programa de simulação potente, flexível e confiável, capaz de analisar tais estruturas.

5. Bibliografia

Assini, M. (1987). "Etude de nouveaux algorithmes de résolution dans les Méthodes de Simulation sans a priori des ensembles Convertisseurs Statiques Machines Électriques". Tese de Doutorado, INP de Toulouse - França.

- Balabanian, N. & Bickart, T. (1979). "Electrical Network Theory". New York - USA. Wiley.
- Bordry, F. (1985). "Synthèse de Méthodes de Simulation des Convertisseurs Statiques. Logiciel SCRIPT - Application en CAO-EAO". Tese de Doutor de Estado, INP Toulouse - França.
- Chen, C. T. (1970). "Introduction to Linear System Theory". New York - USA. Holt, Rinehart and Winston.
- Chua, L. O. & Lin, P. M. (1975). "Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits". New Jersey - USA. Prentice-Hall, Inc. , pp. 364-372.
- Kassakian, J. G. (1979). "Simulation Power Electronics Systems - A New Approach". Proceedings IEEE, vol. 67, no. 10, October, pp. 1428-1439.
- Martins, D. C. (1986). "Étude de la Variation du Pas de Calcul dans la Simulation des Convertisseurs Statiques (logiciel - SCRIPT) - Application à la Modelisation des Convertisseurs à Transistor de Puissance". Tese de Doutorado, INP Toulouse. França.
- Martins, D. C. (1988). "Geração de um Sistema de Estado Expandido aplicado a Simulação Numérica de Conversores Estáticos". Anais do III Congresso Latino-Americano de Controle Automático, Viña del Mar, Chile, pp. 371-376.
- Pottle, C. (1969). "A Textbook Computerized State-Space Network Analysis Algorithm". IEEE Transaction Circuit Theory, vol. CT-16, November, pp. 566-568.
- Schonek, J. (1977). "Simulation Numérique de Convertisseurs Statiques - Elaboration d'un Programme Général. Application à la Conception et à l'Optimisation des Convertisseurs". Tese de Doutorado em Engenharia, INP Toulouse, França.
- Silva, A. R. J. (1989). "Programa SCVOLT - Simulação Numérica de Conversores Estáticos - Método do Voltímetro Empregando a Técnica do Passo de Cálculo Variável". Dissertação de Mestrado, UFSC, CTC - DEEL - LAMEP, Florianópolis, SC