
MODELAGEM E ANÁLISE QUANTITATIVA DE SISTEMAS DE MANUFATURA POR REDES GSPN

Wilson Munemassa Arata
Paulo Eigi Miyagi

Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia Mecânica — Mecatrônica
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 CEP 05508-900, São Paulo, SP, Brasil
E-mail: pemiya@usp.br

RESUMO - Este trabalho trata da modelagem e análise de Sistemas de Manufatura com a utilização de redes GSPN ("Generalized Stochastic Petri Nets"). Para tal, propõe-se fazer uso de uma abordagem hierárquica do fluxo produtivo ("Production Flow Schema") como uma forma de sistematizar a construção dos modelos em redes GSPN, dos quais tira-se partido do isomorfismo com os processos de Markov para realização da análise. Através dos modelos em Cadeias de Markov, obtém-se as informações necessárias para a análise de desempenho de Sistemas de Manufatura. Adicionalmente, é investigada a utilização da técnica da Análise de Sensibilidade para avaliar a influência dos parâmetros quantitativos abordados pelos modelos no comportamento destes sistemas.

Palavras Chaves Redes de Petri Estocásticas Generalizadas, Sistema de Manufatura, Avaliação de Desempenho

ABSTRACT - This work deals with the modeling and analysis of Manufacturing Systems by means of GSPN (Generalized Stochastic Petri Nets). One point introduced is the using of a hierachical approach of the production flows (Production Flow Schema) as a systematic approach to construct GSPN models, whose isomorphism with Markov processes allows the extraction of quantitative data. Afterwards, the paper dicusses a way to get (from the probabilities related to Markov Chains) information to the performance analysis of Manufacturing Systems and, also, the assessment of the Sensitivity Analysis in the evaluation of the influence of the modelled quantitative parameters on

the behavior of the systems.

Keywords Generalized Stochastic Petri Nets, Manufacturing Systems, Performance Evaluation

1 INTRODUÇÃO

As Redes de Petri, pela sua capacidade de modelar sistemas com assincronismos e paralelismos e de abordar características como sincronização, decisão e seqüência (Murata, 1989; Valette, 1990; Peterson, 1981) de uma forma gráfica, são utilizadas em várias atividades, como a especificação, a análise, a síntese e o controle de sistemas denominados de Eventos Discretos (SED) (Cao e Ho, 1990; Cao, 1989; Santos, 1991), sob cuja ótica os Sistemas de Manufatura podem ser enfocados. Para aumentar sua capacidade de lidar com os diversos aspectos desses sistemas, há várias iniciativas no sentido de incorporar outras características ou de adequar as presentes à algum fim específico (Miyagi, 1996; Murata, 1989). As chamadas redes GSPN ("Generalized Stochastic Petri Nets") são uma destas, no caso, introduzindo a grandeza tempo nos modelos sob forma de temporizações, sendo particularmente úteis na análise de Sistemas de Manufatura (Al-Jaar e Desrochers, 1990; Jungnitz *et alii*, 1992; Silva e Valette, 1989). Neste trabalho:

1. inicialmente, é feita uma descrição da estrutura e do mecanismo de funcionamento destas redes;
2. para lidar com a complexidade dos sistemas e dos modelos que os representam, apresentam-se os chamados esquemas PFS (Miyagi, 1996; Liu *et alii*, 1994; Silva e Miyagi, 1996), que definem uma forma sistemática

⁰ Artigo submetido em 09/09/94;
¹ª Revisão em 09/06/95 2ª Revisão em 03/09/96
Aceito por recomendação do Ed.Consultor Prof.Dr.Fernando A. Gomide

de abordar este problema e, também, da geração dos arcabouços para a construção dos modelos finais em redes GSPN;

3. a seguir, faz-se uma descrição de como se chegar a modelos de Cadeias de Markov e suas probabilidades de regime permanente, assim como uma descrição de como obter outras formas de informações sobre Sistemas de Manufatura, mais adequadas que simples probabilidades.
4. finalmente, tem-se o desenvolvimento de um exemplo.

Conforme pode ser constatado no decorrer do texto, a técnica pode ser aplicada a uma ampla classe de sistemas modeláveis por Redes de Petri (muita difundida, como já colocado), desde que atenda às hipóteses (que serão explicadas no texto) de vivacidade, limitação, reiniciabilidade e ausência de ciclos absorventes de estados evanescentes.

2 REDES GSPN E CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO CONTÍNUO

As redes GSPN podem ser vistas como conciliadoras das características de três das técnicas mais difundidas para a análise de SED:

1. Redes de Petri: muito utilizadas na modelagem de sistemas que apresentam paralelismo, com destaque na capacidade de representar sincronizações e processos de decisão. No entanto, as propriedades dependentes da grandeza tempo só podem ser tratadas com a utilização de extensões que incorporem o tempo.
2. Redes de Filas: também muito utilizadas para a obtenção de informação sobre o acúmulo de clientes que solicitam atendimento nos vários centros de serviços que compõem um sistema (como tempo médio de espera por atendimento, número médio de clientes a espera por atendimento nos centros de serviço e taxa de atendimento dos centros de serviços). Uma dificuldade nesta técnica diz respeito ao tratamento de sincronizações e do bloqueio de clientes à entrada das filas que se formam nos centros de serviço.
3. Cadeias de Markov: estes modelos permitem a obtenção das probabilidades dos estados representados; a principal desvantagem é que os modelos tendem a ser cada vez mais difíceis de serem construídos à medida que se estuda sistemas de maior porte.

As redes GSPN modelam os tempos envolvidos nos processos de um sistema e as relações de sincronização e representam a dinâmica dos SED de forma mais econômica e inteligível que as Cadeias de Markov, o que pode ser constatado a seguir. Os conceitos de habilitação e os efeitos de disparo são os mesmos nas Redes de Petri do tipo Lugar/Transição (“Place/Transition”) (Murata, 1989; Peterson, 1981; Vallette, 1990) e nas redes GSPN. Nestas últimas, o elemento adicional é a atribuição de duas diferentes interpretações às transições:

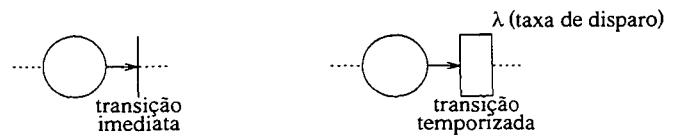


Figura 1 - Elementos das redes GSPN

1. Transições imediatas: são aquelas que disparam assim que se tornem habilitadas. Na representação gráfica, são denotadas por um “traço”, conforme a figura 1.
2. Transições temporizadas: neste caso, as transições disparam um certo tempo após a habilitação, somente aí retirando as marcas dos lugares à entrada. Tais tempos são denominados *temporizações*, que no caso, são variáveis aleatórias com distribuição exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

onde a variável t refere-se a uma temporização. O parâmetro λ da distribuição é denominado *taxa de disparo*. São representadas por retângulos, ao lado dos quais são especificadas as taxas de disparo (ver figura 1).

Devido a existência desses dois tipos de transições, há, também, dois tipos de marcações:

1. Marcação ou estado evanescente: onde há pelo menos uma transição imediata habilitada, tendo tempo de vida nulo (a mudança de estado ocorre imediatamente).
2. Marcação ou estado tangível: onde somente transições temporizadas estão habilitadas e caracterizada, também, por ter tempo de vida finito.

Além das regras de disparo, deve-se observar as regras de resolução de conflitos:

1. Entre transições temporizadas: dispara aquela cuja temporização terminar primeiro.
2. Entre transições imediatas: o mecanismo de arbitragem para este caso é denominado “random switch”, pela qual probabilidades são atribuídas aos disparos das transições envolvidas. Tal atribuição deve ser feita de tal modo que a soma das probabilidades associadas às transições a partir de uma marcação evanescente seja igual à unidade.
3. Entre transições temporizadas e imediatas: as transições temporizadas não disparam; as transições imediatas envolvidas disparam conforme a regra anterior.

Um aspecto interessante é que as taxas de disparo das transições temporizadas e as probabilidades de disparo das imediatas podem ser definidas em termos de funções que dependam apenas da marcação atual da rede (por exemplo, não devem depender do tempo de permanência nos estados

(Kleinrock, 1993; Papoulis, 1984). Por exemplo, pode-se definir uma taxa de disparo em função da marcação num certo lugar, como na figura 2, onde cada marca no lugar que habilita a transição aumenta a taxa de disparo desta de λ_0 (quanto mais marcas, maior a taxa de disparo); na figura 3, as probabilidades de disparo que arbitram o conflito são definidas em termos das marcações de vários lugares: as transições que tiverem “maior grau de habilitação” têm maiores probabilidades de disparo.

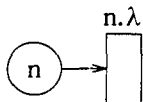


Figura 2 - Taxa de disparo variável

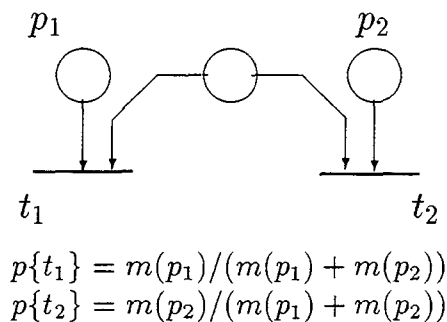


Figura 3 - “Random switch” dependente de marcação

2.1 Isomorfismo

Um outro ponto a considerar é o fato, conforme consta em Molloy (1982) e Marsan *et alii*(1984), que as redes GSPN vivas, limitadas e reinicializáveis são isomórficas a Cadeias de Markov ergódicas. Tais Cadeias de Markov (Kleinrock, 1993; Papoulis, 1984) apresentam as denominadas *probabilidades de regime permanente ou de equilíbrio dos estados*, para as quais as probabilidades dos estados tendem à medida que passa o tempo e que independem de qual estado da cadeia é o inicial — sendo $p(t)$ o vetor das probabilidades dos estados num instante t e π , o vetor das probabilidades de regime permanente, numa Cadeia de Markov ergódica observa-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \pi$$

independentemente de qual seja o valor de $p(0)$ (observada a restrição de que a soma dos elementos do vetor seja a unidade). A partir dessas probabilidades, pode-se derivar outras informações que podem ser mais significativas ao nível de avaliação de Sistemas de Manufatura, conforme é tratado adiante.

Considere-se a rede GSPN da figura 4, que se encontra na marcação (ou estado) inicial E_1 . A topologia da árvore de alcançabilidade (Murata, 1989) é mostrada na figura 5, que mostra a evolução das marcações mediante os disparos das transições (um de cada vez). A figura 6 representa a forma como as marcações evoluem numa rede GSPN, apresentando os seguintes elementos:

1. Os estados tangíveis são representados por círculos

cheios; destes elementos, saem arcos cheios que correspondem a disparos de transições temporizadas. Tais arcos são caracterizados pelas taxas de disparo das transições respectivas.

2. Os círculos de perímetro tracejado representam os estados evanescentes; destes elementos, saem arcos também tracejados, aos quais se associam conjuntos de transições imediatas que, nesta abordagem, disparam simultaneamente. Observa-se que, no caso de haver conflitos na marcação, múltiplos arcos saem destes elementos. A tais arcos associam-se probabilidades de modo que a soma das probabilidades dos arcos que saem de um mesmo estado evanescente seja igual à unidade. (No caso do exemplo, ao invés das probabilidades, os arcos são caracterizados pelos conjuntos de transições disparadas).

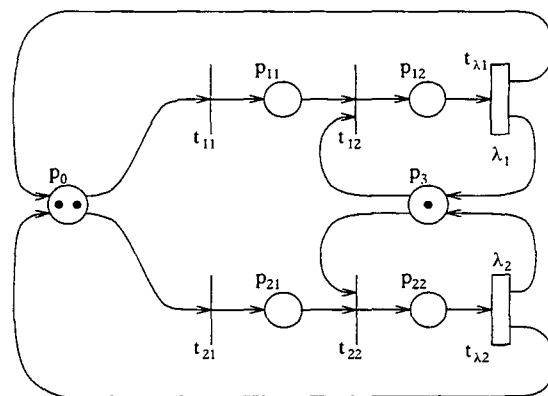


Figura 4 - Exemplo de GSPN

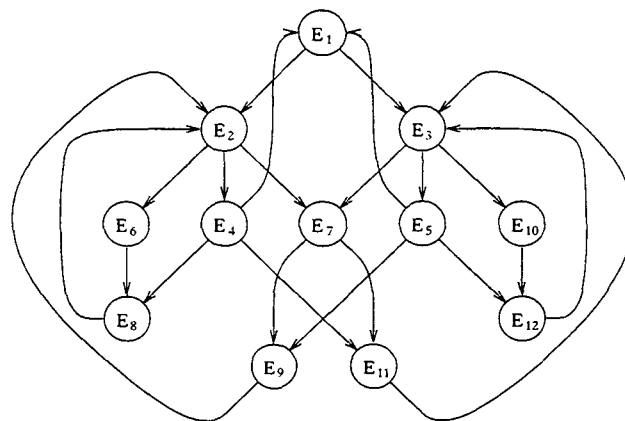


Figura 5 - Grafo de alcançabilidade da rede da Figura 4

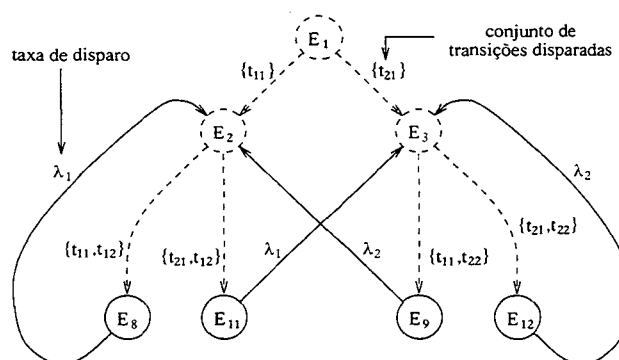


Figura 6 - Evolução das marcações da rede da Figura 4

Na figura 6, observa-se que o estado E_1 não tem nenhum outro que o anteceda: trata-se de um estado do tipo *órfão*, o qual pode ser eliminado, uma vez que não participa do regime permanente do sistema (que é o caso em foco), servindo apenas como ponto de partida da dinâmica. Assim, com sua eliminação obtém-se a representação da figura 7, notando-se que os arcos que saíam do mesmo foram igualmente eliminados. A eliminação de estados órfãos deve ser repetida até que estejam completamente excluídos do grafo.

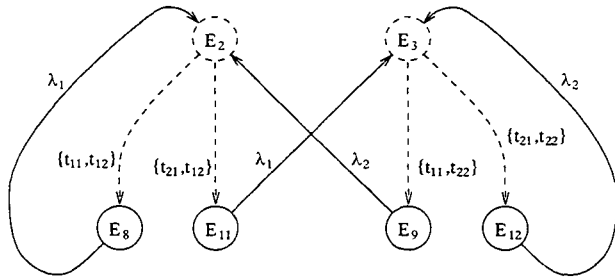


Figura 7 - Grafo sem estado órfão derivada da Figura 6

Na figura 7, nota-se que os estados evanescentes E_2 e E_3 têm, ambos, dois arcos que deles saem; tal duplicidade deve-se ao fato que, nessas marcações, ocorre conflito entre as transições t_{11} e t_{21} . Se as “random switches” definidas para arbitrar tal conflito atribuírem probabilidades de disparo p_1 para t_{11} e p_2 para t_{21} e considerando-se que t_{12} (t_{22}) dispara com certeza na marcação E_2 (E_3), são atribuídas a probabilidade p_1 ao arco entre E_2 e E_8 (E_3 e E_9) e p_2 àquele entre E_2 e E_{11} (E_3 e E_{12}).

O grafo da figura 8 é obtido a partir do grafo anterior da seguinte forma: partindo-se de um estado tangível, segue-se os arcos até que se atinja um estado tangível; cada caminho assim percorrido, corresponde um arco no grafo resultante; a taxa de transição que caracteriza este arco é dado pelo produto das taxas de disparo e das probabilidades que caracterizam os arcos percorridos; tal processo é realizado para todos os estados tangíveis. Findo este processo, tem-se um grafo onde não há mais estados evanescentes. No entanto, como nos casos dos estados E_8 e E_9 , há arcos que se originam e terminam no mesmo estado (arcos retornantes), mas que não têm qualquer significado, pois a permanência num certo estado é representado pelo tempo correspondente, podendo ser eliminados, resultando no grafo da figura 9, que representa uma cadeia de Markov.

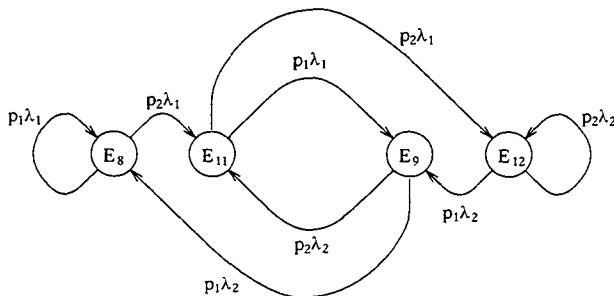


Figura 8 - Grafo com arcos retornantes derivada da Figura 7

Um fato que vale observar é a diferença dos números de estados entre o grafo de alcançabilidade (caso que teria de ser considerado se todas as transições fossem tempo-

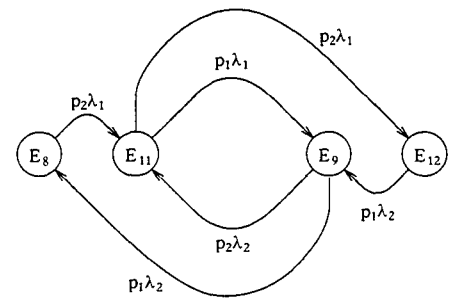


Figura 9 - Cadeia de Markov de Tempo Contínuo isomórfica à rede da Fig. 8

rizadas) e o modelo de cadeia de Markov obtido, caso em que as transições imediatas são aquelas consideradas como tendo tempos desprezíveis em comparação aos das demais transições.

Enfim, um ponto importante é que, além da vivacidade, limitação e reiniciabilidade, a ergodicidade da cadeia de Markov é obtida se não ocorrer ciclos exclusivamente de estados evanescentes que sejam absorventes (ou seja, não há transições que tirem o sistema de tais ciclos), sendo, portanto, uma quarta hipótese a ser observada.

3 CONSTRUÇÃO DE MODELOS EM REDES GSPN

Para representar a abstração adotada, a abordagem aqui adotada é a de, inicialmente, desenvolver um esquema PFS (Miyagi, 1996; Miyagi *et alii*, 1997) : desta forma, conforme pode ser constatado a seguir:

- pode-se modelar características importantes das funções a serem consideradas na análise de um Sistema de Manufatura (como as relações de precedência entre as operações, os elementos de promovem e controlam (sincronização) o paralelismo e a identificação de alguns dos processos de decisão envolvidos, como no roteamento de peças e no compartilhamento de recursos).
- tem-se uma ferramenta efetiva na construção de modelos baseados em Redes de Petri dentro de uma proposta hierárquica, onde o PFS representa um nível superior de abstração (não chega a representar a dinâmica de um sistema); adotando-se uma postura de não estabelecer hipóteses antes do necessário (“delay commitment”), evita-se que o desenvolvimento posterior seja indesejavelmente restringido ou que a verificação da invalidade dessas hipóteses leve a uma ainda mais onerosa reestruturação do modelo (principalmente, para eliminar as construções baseadas nessas suposições). Os esquemas PFS permitem representar elementos essenciais na dinâmica de um Sistema de Manufatura, sem, no entanto, detalhá-los, o que pode ser feito à medida que se tenha um conhecimento mais claro da dinâmica a detalhar.
- tem-se que o funcionamento de um sistema de manufatura é representado por uma abstração onde as *atividades* envolvem interações entre *clientes* e *recursos*

(conceitos definidos a seguir), o que constitui uma primeira forma de organizar os dados disponíveis, e cuja estrutura evolui nos modelos sucessores de forma natural, tornando-os de mais fácil entendimento.

Partindo-se de um tal esquema, através de seu detalhamento, obtém-se o modelo final em redes GSPN, sendo do interesse deste trabalho somente as redes que forem vivas, limitadas e reinicializáveis, possibilitando obter informações a nível quantitativo a partir da Cadeia de Markov ergódica isomórfica.

3.1 Esquemas PFS

Os esquemas PFS (ver figura 10) são constituídos pelos seguintes elementos:

1. Blocos atividades: são representados por blocos retangulares semi-abertos.
2. Elementos distribuidores: denotados por círculos.
3. Arcos orientados: conectam blocos atividades a elementos distribuidores (nunca dois elementos de um mesmo tipo).

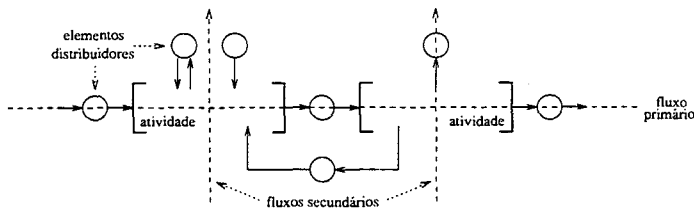


Figura 10 - Elementos dos esquemas PFS

Os esquemas PFS mostram como itens envolvidos na produção atuam na realização das funções necessárias para se obter os produtos desejados. Um importante conceito apresentado pelos esquemas PFS é o de *fluxo* de itens, que representa o processo de vinculação e desvinculação de itens (que podem ser matérias-primas, máquinas, ferramentas, ordens de execução e informações de controle) a uma atividade e em cuja execução estejam envolvidos. Os esquemas PFS indicam que as atividades de um sistema (representados pelos blocos atividade) envolvem a interação entre itens oriundos dos fluxos que se ligam a essas atividades, que são representados pelos elementos conectados pelos arcos. Os fluxos são classificados em *primários* e *secundários*:

1. Os fluxos primários são representados pelos elementos dos esquemas PFS conectados às bordas fechadas dos blocos atividades.
2. Os fluxos secundários referem-se aos elementos que se ligam aos blocos atividades pelas partes abertas destas.

As bordas fechadas indicam o início e o fim das atividades. Pelas bordas abertas, a relação com os itens tende a ser mais relaxada, pelo menos neste nível de abstração: a

forma como intervêm nas atividades deve ser especificada nos modelos detalhados a serem gerados (por exemplo, um certo item pode não ser utilizado em algumas ocasiões, pois um outro item pode dar cobertura a função que aquele desempenharia).

Cabe observar que esta conceituação de fluxo é uma simplificação do que é apresentado em Miyagi (1996), no sentido de que se trata de um caso particular, mas que satisfaz aos usos deste trabalho.

Considerando-se Sistemas de Manufatura, os esquemas PFS especificam a estrutura de um tal sistema na medida que explicita onde existe interação entre os *recursos* e os *clientes*. Recursos são os componentes do sistema com funções específicas (como, máquinas, transportadores e sistemas de inspeção); clientes referem-se aos substratos materiais sobre os quais atuam os recursos (por exemplo, peças, lotes de peças e "pallets"). Posto isto, pode-se descrever a convenção adotada por este trabalho:

- Os blocos atividades representam, propriamente, as atividades, as quais congregam operações realizadas através da utilização de recursos (como a movimentação de clientes ou a transformação de suas propriedades) e operações de apoio (como a alocação de recursos ou a sinalização de máquina com defeito); no entanto, tais operações não são explicitadas neste nível de abstração.
- Os elementos distribuidores têm duas funções:
 1. Aqueles envolvidos nos fluxos primários representam o armazenamento de clientes nos chamados "buffers".
 2. Aqueles que compõem os fluxos secundários dos blocos atividades representam o recursos a serem utilizados pelas atividades.
- Quanto aos arcos, tem-se que:
 - Os pertencentes aos fluxos primários indicam as possíveis seqüências de atividades que um cliente pode sofrer.
 - Nos fluxos secundários, o arco que entra no bloco atividade indica que o recurso conectado pode vir a ser alocado; o arco que sai, que pode haver liberação do recurso associado ao elemento distribuidor.

Um exemplo de esquema PFS é mostrado na figura 11, onde se mostra algumas das características modeláveis:

- Paralelização: o fim da atividade gera dois clientes que sofrem diferentes ações de forma concorrente um ao outro.
- Sincronização: de forma genérica, é um meio de restringir o paralelismo, fazendo com que a execução de um dos processos obedeça a algumas restrições, como espera de um sinal vindo de outro processo ou espera pela liberação de algum recurso; no caso da figura, a

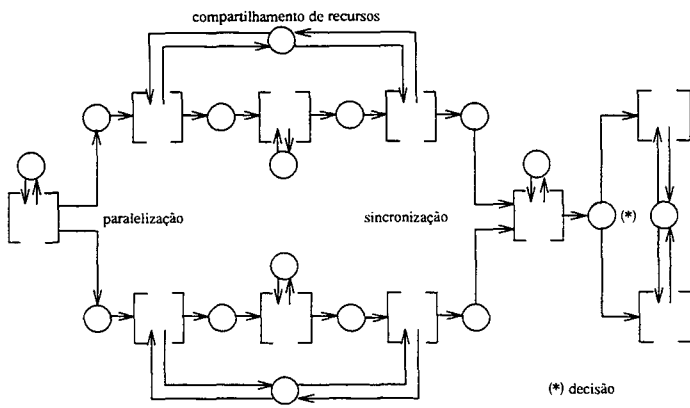


Figura 11 - Características modeladas pelos esquemas PFS

atividade deve esperar que itens correspondes à entrada da atividade estejam ambos presentes para se iniciar.

- Decisão: os clientes têm mais de uma opção quanto à próxima atividade a sofrer. O esquema PFS apenas indica que existe tal processo de decisão, que deve ser descrito nos modelos detalhados.
- Compartilhamento de recursos: duas atividades podem fazer uso de um mesmo recurso, o que pode gerar conflitos quanto à prioridade na alocação do mesmo; como no item anterior, a arbitragem deste conflito deve ser indicado pelos modelos detalhados.

Considere-se, agora, o esquema PFS da figura 12. Tem-se duas seqüências de atividades: T_A-P_A e T_B-P_B . O subsistema R , constituído por robôs, pode ter seus recursos alocados pelas atividades T_A e T_B de transporte, mostrando um potencial compartilhamento de recursos. As vagas do "buffer" de entrada do centro de processamento A , $vbfinA$ podem ser alocadas por T_A e liberadas por P_A ; interpretação análoga para $vbfinB$ (vagas do "buffer" de entrada do centro de processamento B) com T_B e P_B . Os recursos dos centros de processamento A e B passam pelo ciclo alocação-liberação de recursos nas atividades P_A e P_B respectivamente. Os clientes passam pelos "buffers" $bfinA$ e $bfinB$ entre as atividades de transporte e de processamento.

3.2 Detalhamento em redes GSPN

No enfoque aqui adotado, as redes GSPN detalham as atividades representando as interações entre as diversas condições, as quais provocam o surgimento, a manutenção e o desaparecimento das mesmas. Por condições, deve-se entender qualquer informação relevante que condicione a evolução do comportamento do sistema; o conjunto de todas as condições recebe a denominação de estado (ver Peterson (1981)). Em termos de elementos da rede GSPN:

- Os lugares representam as condições (por exemplo, processamento em curso, peça em transporte, cliente esperando num "buffer" e operação suspensa).

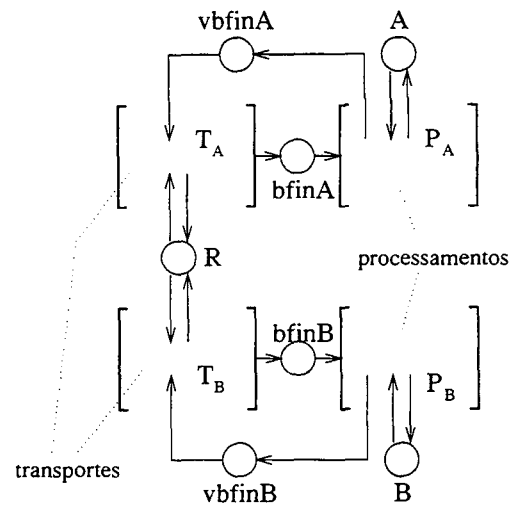


Figura 12 - Exemplo de esquema PFS

- A presença de marcas num lugar indica que a condição correspondente é verificada; a ausência, que não é observada.
- As transições especificam quais pré-condições possibilitam o surgimento de outras condições; seus disparos representam o surgimento e o desaparecimento das condições. As temporizações especificadas modelam o tempo de permanência das condições representadas pelos lugares que habilitam as transições.

Assim, refinando o esquema da figura 12, pode-se chegar a uma rede GSPN como a dada pela figura 13. Deve-se ressaltar que esta é apenas uma das possíveis "traduções", as quais vão ocorrer conforme as dinâmicas particulares que se desejar representar. No caso, os elementos distribuidores são traduzidos diretamente em lugares, os quais representam disponibilidade de recursos ($vbfinA$, $vbfinB$, $R.disp$, $A.disp$ e $B.disp$) ou clientes estacionados em "buffers" ($bfinA$ e $bfinB$); um recurso está disponível se houver marcas nos lugares correspondentes; a liberação de recursos dá-se com a reposição de marcas a esses lugares. Os blocos atividades são representados por subredes GSPN, com uma transição representando início de atividade, condicionada à disponibilidade de recursos: nas atividades T_A e T_B , inicia-se com a alocação de vagas em "buffers" e robôs e, nas atividades P_A e P_B , inicia-se com a alocação de recursos dos centros de processamento e liberação de vagas de "buffers"; um lugar representando operação em curso; uma transição temporizada cuja taxa de disparo caracteriza o tempo de operação e cujo disparo indica fim de atividade, com liberação de recursos no caso das atividades P_A e P_B .

Até este ponto, abordou-se os aspectos qualitativos das funções exercidas pelo sistema, ou seja, a forma como as atividades estão organizadas e os recursos são alocados. Faltam, portanto, os aspectos quantitativos:

- Número de recursos: isto é resolvido fazendo com que na marcação inicial, todos os recursos estejam disponíveis, ou seja, somente os lugares que representam disponibilidade de recursos (no exemplo, $A.disp$, $B.disp$, $R.disp$, $vbfinA$ e $vbfinB$) têm marcas e em

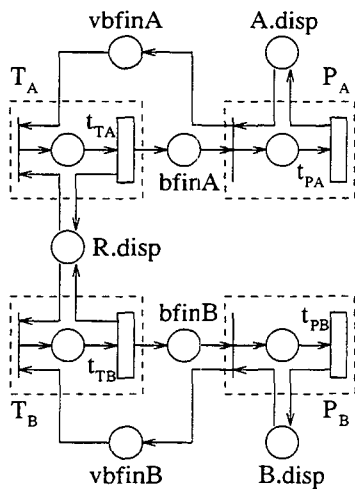


Figura 13 - Modelo em rede GSPN

número igual à quantidade do respectivo recurso no sistema, ficando sem marcas os lugares que indicam ocupação de recursos.

- As temporizações, dadas pelas taxas de disparo.

Assim, considere-se, por exemplo, que há dois robôs para executar os transportes tanto para o centro de processamento A como o centro B, duas vagas para cada um dos “buffers” de entrada de ambas as máquinas e uma máquina para cada centro de processamento. Para a transição t_{TA} , atribui-se a taxa $1000n_A$, onde n_A representa o número de marcas em p_{TA} ; cada marca em p_{TA} indica um robô transportando um cliente — assim, duas marcas representam duas atividades de transporte em curso e, portanto, a taxa de término desses deslocamentos é igual ao dobro do que ocorreria no caso de um único robô, explicando a definição da taxa de disparo. De forma análoga, explica-se a taxa de $2000n_B$ para t_{TB} . Às transições temporizadas envolvidas nos processamentos P_A e P_B são atribuídas as taxas de 1000 e 2000 peças/dia respectivamente. Assim, finalmente, chega-se ao modelo GSPN final, ilustrado pela figura 14.

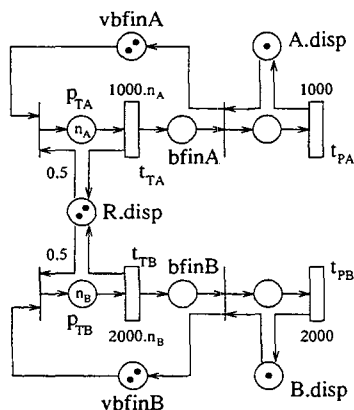


Figura 14 - Modelo em rede GSPN final

4 ANÁLISE QUANTITATIVA

A análise quantitativa tratada neste trabalho não é feita diretamente sobre a rede GSPN, mas sobre a Cadeia de

Markov de Tempo Contínuo (CMTC) que lhe é isomórfica (Miyagi *et alli*, 1997). Em particular, o interesse recai sobre o caso onde a rede GSPN é viva, limitada, reinicializável e livre de ciclos absorventes de estados evanescentes, o que garante que a CMTC isomórfica seja ergódica. Os passos para se chegar às probabilidades de regime permanente dos estados tangíveis é baseada no desenvolvimento de Marsan *et alli* (1984), onde também é tratada a forma como as informações das probabilidades (relativas a transições oriundas de estados evanescentes) são incorporadas na CMTC. Uma vez obtida a CMTC, obtém-se as probabilidades de regime permanente, dadas pelo vetor $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$, onde n é o número de estados (tangíveis) efetivamente modelados pela CMTC.

4.1 Índices de desempenho

As informações que podem ser obtidas tendo-se π e colocadas de forma mais conveniente para muitos casos de avaliação de um sistema de manufatura recebem, aqui, a denominação de índices de desempenho de sistemas de manufatura. Três desses índices são enfocados:

Definição 1 *Grau de ociosidade de um recurso R: representa a probabilidade de encontrar R em disponibilidade ou sem utilização. É calculado por:*

$$G_{ocio}(R) = \sum_{i \in V(R)} \pi_i \quad (1)$$

onde $V(R)$ representa o conjunto dos estados da CMTC em que o lugar correspondente à disponibilidade de R tem pelo menos uma marca.

Definição 2 *Número médio de clientes no “buffer” b, dado por:*

$$\bar{N}(b) = \sum_{i=1}^n \pi_i \left(\sum_{p_j \in B(b)} m_i(p_j) \right) \quad (2)$$

onde $m_i(p_j)$ representa o número de marcas no lugar p_j no estado (ou marcação) i e $B(b)$ representa o conjunto de lugares que indica que há clientes esperando serem retirados do “buffer” b .

Definição 3 *“Throughput” de uma atividade A representa a taxa de execução de uma atividade ou a taxa de atendimento de clientes efetivamente realizada. É dado por:*

$$T(A) = \sum_{i \in H(A)} \pi_i \lambda_i(A) \quad (3)$$

onde $H(A)$ representa o conjunto de estados em que a transição t_A correspondente ao término da atividade A está habilitada e $\lambda_i(A)$, a taxa de disparo de t_A na marcação i .

No caso do modelo da figura 14, os índices obtidos são dispostos nas tabelas 1, 2 e 3.

O relativo baixo grau de ociosidade de R indica que as atividades de transporte são intensas. Os números médios

Tabela 1 - Graus de ociosidade de recursos

Rec	$G_{ocio}(Rec)$
R	0.2890
<i>vbfinA</i>	0.2384
<i>vbfinB</i>	0.3941
A	0.1536
B	0.2335

Tabela 2 - Números médios de clientes em "buffers"

<i>b</i>	$N(b)$
<i>bfinA</i>	0.9015
<i>bfinB</i>	0.7542

de clientes nos "buffers" *bfinA* e *bfinB* estão abaixo do máximo permitido de duas unidades; os graus de ociosidade dos centros de processamento A e B são maiores que o valor ideal nulo, mas que pode ser justificado pela natureza da produção (por exemplo, pela flexibilidade que se deseja do sistema); os "throughputs" das atividades estão aquém das capacidades máximas (1000 e 2000 peças/dia): tais observações podem ser indícios de que o grande "gargalo" de produção é o sistema de transporte R.

4.2 Análise de Sensibilidade

Através da Análise de Sensibilidade (Karnavas *et alii*, 1993), pode-se avaliar a extensão da influência dos parâmetros quantitativos sobre os índices de desempenho. Seja *I* um índice de desempenho e $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, uma *n*-upla cujos elementos se constituem nos parâmetros quantitativos do modelo, ou seja, as taxas de disparo e as probabilidades das "random switches" (que compõem as probabilidades relativas às transições a partir de estados evanescentes). Tem-se as seguintes definições:

Definição 4 Numa certa configuração de parâmetros quantitativos *A*, a sensibilidade absoluta de um índice *I* em relação a um parâmetro a_i , $S_{abs}(I, A, a_i)$, é dada pela derivada parcial de *I* em relação a a_i :

$$S_{abs}(I, A, a_i) = \frac{\partial I}{\partial a_i} \quad (4)$$

Definição 5 Numa certa configuração de parâmetros quantitativos *A*, a sensibilidade relativa de um índice *I* em relação a um parâmetro a_i é dada por:

Tabela 3 - "Throughputs" de atividades

A	$T(A)$
T_A	846.4290
P_A	846.4293
T_B	1533.0900
P_B	1533.0907

$$S_{rel}(I, A, a_i) = S_{abs}(I, A, a_i) \frac{a_i}{I} \quad (5)$$

$S_{rel}(I, A, a_i)$ representa a razão entre a variação percentual de *I* decorrente de uma variação num parâmetro a_i e a variação percentual do mesmo parâmetro a_i numa dada configuração paramétrica A.

Conforme pode ser constatado, as expressões dos índices de desempenho podem ser representadas por um produto de dois vetores:

$$I = \pi m$$

onde π é o vetor-linha de probabilidades de regime permanente e m é um vetor coluna com *n* elementos, que varia conforme o índice a utilizar.

Assim, a sensibilidade absoluta de *I* em relação a a_i tem a seguinte forma:

$$S_{abs}(I, A, a_i) = \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \pi\right) m + \pi \left(\frac{\partial}{\partial a_i} m\right) \quad (6)$$

Para o cálculo das probabilidades, são utilizadas as seguintes equações:

$$\pi Q = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \quad (8)$$

Derivando-se as equações (8) e (7), tem-se que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \pi\right) Q + \pi \left(\frac{\partial}{\partial a_i} Q\right) = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_i}{\partial a_i} = 0 \quad (10)$$

Manipulando-se a equação (9), tem-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i} \pi\right) Q = -\pi \left(\frac{\partial}{\partial a_i} Q\right) \quad (11)$$

Através de (11) e (10), monta-se um sistema linear de equações do tipo

$$xA = b$$

a partir do qual se obtém a derivada de π , que utilizada na expressão (6), permite obter o valor das sensibilidades.

Para o modelo da figura 14, as sensibilidades relativas dos índices em relação aos parâmetros quantitativos são dadas pelas tabelas 4, 5 e 6.

Analisando-se as sensibilidades relativas, conclui-se que:

Tabela 4 - Sensibilidades relativas dos graus de ociosidade dos recursos

Parâmetros	Recursos				
	R	$vbfinA$	$vbfinB$	A	B
p_A	0.0537	-0.1491	-0.0800	-0.0721	-0.0520
p_B	0.0471	-0.0552	-0.1538	-0.0423	-0.0947
$\lambda(t_{TA})$	0.4034	-0.1852	-0.6586	-0.2814	-0.2570
$\lambda(t_{TB})$	0.4038	-0.3594	-0.3307	-0.0985	-0.3432
$\lambda(t_{PA})$	-0.4268	0.3495	0.5211	0.3330	0.1650
$\lambda(t_{PB})$	-0.3804	0.1951	0.4682	0.0469	0.4352

Tabela 5 - Sensibilidades relativas dos números médios de clientes em "buffers"

Parâmetros	"Buffers"	
	$bfinA$	$bfinB$
p_A	0.1511	0.0883
p_B	0.0868	0.1625
$\lambda(t_{TA})$	0.8274	0.5084
$\lambda(t_{TB})$	0.2518	0.9190
$\lambda(t_{PA})$	-0.9437	-0.3874
$\lambda(t_{PB})$	-0.1354	-1.0400

Tabela 6 - Sensibilidades relativas dos "throughputs" das atividades

Parâmetros	Atividades			
	T_A	P_A	T_B	P_B
p_A	-0.0180	0.0721	-0.0475	0.0520
p_B	-0.0478	0.0423	-0.0049	0.0947
$\lambda(t_{TA})$	0.2814	0.2814	0.2570	0.2570
$\lambda(t_{TB})$	0.0985	0.0985	0.3432	0.3432
$\lambda(t_{PA})$	0.6670	0.6670	-0.1650	-0.1650
$\lambda(t_{PB})$	-0.0469	-0.0469	0.5648	0.5648

- Os elementos do sistema são bastantes "acoplados", no sentido de que todos influenciam nos índices em maior ou menor grau.
- Consistente com a identificação do subsistema R como o principal "gargalo" de produção, tem-se que um aumento na sua capacidade de trabalho (dados pelos parâmetros $\lambda(t_{TA})$ e $\lambda(t_{TB})$) alivia a carga de tarefas sobre esse subsistema (observado pelo aumento do seu grau de ociosidade) e resulta num melhor aproveitamento dos demais recursos (diminuição do grau de ociosidade e pelo aumento da carga de trabalho dos centros de processamento, dado pelo aumento do número médio de clientes nos "buffers") e num aumento do "throughputs" das atividades.
- Pode-se verificar que algumas interações não evidentes ao se analisar apenas os índices, como a de que um aumento na capacidade de trabalho do centro de processamento A (B), representado por $\lambda(t_{PA})$ ($\lambda(t_{PB})$), provoca uma redução nos "throughputs" das atividades T_B e P_B (T_A e P_A).

5 CONCLUSÕES

O primeiro aspecto notado é que as redes GSPN são uma maneira eficaz de especificar modelos markovianos; em particular, é útil o caso das redes GSPN vivas, limitadas, reinicializáveis e livres de ciclos absorventes de estados evanescentes, que são isomórficas a Cadeias de Markov de Tempo Contínuo ergódicas. Tais hipóteses não limitam muito a análise, uma vez que são propriedades desejáveis em parte muito significativa dos SED (há quem defina as três primeiras como sendo as "boas propriedades" (Valette, 1990)).

A utilização de esquemas PFS auxiliam na construção das redes GSPN na medida que permitem abordar sistemas de manufatura de forma natural (destacando-se a diferenciação entre os fluxos primários e secundários).

O exemplo adotado neste trabalho mostra, apesar do reduzido porte do modelo, como os conceitos desenvolvidos para os esquemas PFS podem ser aproveitados para lidar com a questão da complexidade dos sistemas e dos modelos (o que pode ser atestado por Santos *et alii* (1992), Liu *et alii* (1994) e Silva e Miyagi (1996)). Casos considerando mais elementos e outras características são tratados em Arata (1994), onde a aplicabilidade da técnica é demonstrada para vários tipos de estudos.

Com relação à análise quantitativa, mostrou-se como algumas informações mais significativas que simples probabilidades do ponto de vista de algumas análises de Sistemas de Manufatura podem ser obtidas das probabilidades de regime permanente. Da mesma forma, mostrou-se como a Análise de Sensibilidades pode vir a auxiliar no estudo de Sistemas de Manufatura, com a vantagem de que os sistemas lineares para obtenção do vetor das probabilidades de regime permanente e dos vetores de suas derivadas têm a mesma matriz de coeficientes (Q), com grande aproveitamento em termos de computação numérica.

Com estas informações (e a maneira de obtê-las), muitas

atividades são beneficiadas, como aquelas relacionadas com o dimensionamento de Sistemas de Manufatura e com a avaliação técnico-econômica dos mesmos. Nesse sentido, alguns estudos a implementar são:

- elaboração de um sistema computacional de auxílio à interpretação dos resultados, uma vez que podem ser em número muito grande para sistemas de manufatura de certo porte;
- implementação de algoritmos eficientes para o cálculo dos índices e sensibilidades (conforme as abordagens apresentadas por (Silva e Muntz, 1992) e (Stewart, 1973));
- estabelecimento da relação entre as características das curvas dos índices \times parâmetros quantitativos (por exemplo, pontos de máximo e de mínimo, concavidades, pontos de inflexão e assíntotas) e os componentes do modelo;
- utilização de técnicas aproximadas mas computacionalmente eficientes na obtenção dos índices.

Enfim, vale expressar os agradecimentos a CAPES, CNPq, FAPESP e FlexSys pelo apoio que concederam às atividades que permitiram a realização deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- Al-Jaar, R.Y. & Desrochers, A.A (1990)** Performance Evaluation of Automated Manufacturing Systems Using Generalized Stochastic Petri Nets. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6, p.621-639.
- Arata, W.M. (1994)** *Análise Quantitativa de Sistemas de Manufatura: Abordagem Baseada em Redes GSPN ("Generalized Stochastic Petri Nets")*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Cao, X.-R. (1989)** A Comparison of the Dynamics of Continuous and Discrete Event Systems. *Proceedings of the IEEE*, 77, n.1, p.7-13.
- Cao, X.-R. & Ho, Y.-C. (1990)** Models of Discrete Event Dynamics Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 10, n.4, p.69-76.
- Jungnitz, H., Sánchez, B. and Silva, M. (1992)** Response Time Approximation for the Performance Analysis of Manufacturing Systems Modeled with Stochastic Marked Graphs. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, 1992, v.2, p.1000-1005.
- Karnavas, W.J., Sanchez, P.J. and Bahill, A.T. (1993)** Sensitivity Analyses of Continuous and Discrete Systems in the Time and Frequency Domains. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23, n.2, p.488-501.
- Kleinrock, L. (1976)** *Queueing Systems.*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York 1976.
- Kleinrock, L. (1993)** On the Modeling and Analysis of Computer Networks. *Proceedings of the IEEE*, 81, n.8, pp.1179-1191.
- Liu, W., Miyagi, P.E., Schreck, G. (1994)** MFG/PFS Methodology in Manufacturing Industries. *Studies in Informatics and Control*, I.C. Publ. Bucharest, 3, n.2-3, p.1195-200.
- Marsan, M.A., Conte, G. and Balbo, G. (1984)** A Class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Evaluation of Multiprocessor Systems. *ACM Transactions on Computer Systems*, 2, n.2, pp.93-122.
- Miyagi, P.E. (1996)** *Controle Programável - Fundamentos do Controle de Sistemas a Eventos Discretos*. Edgard Blücher, São Paulo.
- Miyagi, P.E., Arata, W.M., Moscato, L.A. (1997) Application of PFS Model (Production Flow Schema) Based Analysis of Manufacturing Systems for Performance Assessment. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM*, Rio de Janeiro, 19, no.1.
- Molloy, M.K. (1982)** Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets. *IEEE Transactions on Computers*, C-31, n.9, pp.913-917.
- Murata, T. (1989)** Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. *Proceedings of the IEEE*, 77, n.4, pp.541-589.
- Papoulis, A. (1984)** *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 2.ed., McGraw-Hill, New York.
- Peterson, J.L. (1981)** *Petri net theory and the modeling of systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Santos Filho, D.J. (1991) e Miyagi, P.E.** Sistemas de Eventos Discretos e seu controle. *Anais do I Congresso Brasileiro de Instrumentação e Sistemas de Automação, ISA*, São Paulo, 1991, pp.2.1-2.12.
- Santos Filho, D.J., Arakaki, J., Miyagi, P.E. (1992)** Analysis of Integrated Manufacturing Systems Based on MFG/PFS Methodology. *Robótica e Automação*, Lisboa, n.10, p.19-24.
- Silva, E.A.S. & Muntz, R.R. (1992).** *Métodos Computacionais de Solução de Cadeias de Markov: Aplicações a Sistemas de Computação e Comunicação*. Gramado.
- Silva, J.R. & Miyagi, P.E. (1996)** A Formal Approach to PFS/MFG: A Petri Net Representation of Discrete Manufacturing Systems. *Studies in Informatics and Control*, I.C. Publ., Bucharest, 5, n.2, p.131-141.
- Silva, M. & Valette, R. (1989)** Petri Nets and Flexible Manufacturing. In G. Rozenberg (Ed.), *Advances in Petri Nets 1989*, v.424, Springer-Verlag, Berlin.
- Stewart, G.W. (1973)** *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York.
- Valette, R. (1990)** *Les Réseaux de Petri*. L.A.A.S./C.N.R.S., Toulouse.