

ESTABILIZACIÓN DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES MUESTREADOS

J.L. Mancilla-Aguilar y R.A. García***

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina

*e-mail jmancil@aleph.fi.uba.ar **e-mail rgarcia@aleph.fi.uba.ar

Resumen: La estabilización de sistemas no lineales continuos muestrados mediante controles constantes en los intervalos de muestreo, es un problema importante, dada la tendencia a implementar el controlador mediante computadoras digitales.

En este trabajo, presentamos para una clase de sistemas no lineales, resultados que aseguran la existencia de una solución para tal problema, más aún, mostramos que es posible obtener la estabilización exponencial del sistema. Como parte del trabajo presente damos pautas para calcular la frecuencia de muestreo a partir de la cual tal resultado es posible.

Palabras claves: Sistemas no lineales muestrados. Estabilidad.

Stabilization of a Class of Nonlinear Sampled-Data Systems

Abstract: The problem of the stabilization of continuous time nonlinear sampled-data systems with controls that are constant between two sample times arises when the controller is a digital computer.

In this work we obtain, for a class of nonlinear systems, results that assure that a solution for that problem exists. In addition, we show that the exponential stabilization of this class of systems is possible. We also present explicit bounds for the sampling frequency that guarantee that these results hold.

Keywords: Nonlinear sampled-data systems. Stability.

Estabilização de uma Classe de Sistemas não Lineares Amostrados

Resumo: A estabilização de sistemas não lineares contínuos amostrados mediante controles constantes nos intervalos de amostragem, é um problema importante, devido

à tendência de implementar o controlador mediante computadores digitais.

Neste trabalho, apresentamos para uma classe de sistemas não lineares, resultados que asseguram a existência de uma solução para tal problema, além disso mostramos que é possível obter a estabilização exponencial do sistema. Também são dadas pautas para calcular a frequência de amostragem a partir da qual tal resultado é possível.

Palavras chaves: Sistemas não lineares amostrados. Estabilidade.

1 INTRODUCCIÓN

La teoría de control de sistemas no lineales continuos ha crecido en forma vertiginosa en la última década, especialmente debido a la posibilidad de transformar tales sistemas en lineales mediante cambio de coordenadas y realimentación de estados (Isidori, I., 1989; Nijmeijer, H. and van der Schaft, A., 1990). Numerosos problemas tales como estabilización, seguimiento de referencias, etc. han sido resueltos con esta técnica.

Por otra parte, es cada vez más frecuente la implementación del controlador mediante una computadora digital, aún cuando este haya sido diseñado a partir del modelo continuo. Una metodología conducente a tal fin, consiste en tomar como punto de partida la discretización de la planta continua y aplicar a ella la teoría de control no lineal en tiempo discreto, (ver Lee, H.-G. and Marcus, S.I., 1986; Lee, H.G., et al., 1987; Jakubczyk, B., 1987; Castillo, B., et al., 1993; entre otros). Sin embargo, muchas de las propiedades del sistema continuo se pierden al discretizarlo, por ejemplo la linealizabilidad mediante cambio de coordenadas y realimentación (Grizzle, J.W. and Kokotovic, V., 1988), salvo que se impongan hipótesis muy restrictivas (Arapostathis, A., et al., 1989). Otra desventaja de este método es que es sumamente difícil obtener una descripción

° Artigo submetido em 22/05/96;

1ª Revisão em 21/08/96

Aceito por recomendação do Ed.Consultor Prof.Dr.Paulo Sérgio Pereira da Silva

exacta del modelo no lineal discretizado. Aún para sistemas no lineales analíticos, lo que se obtiene (Monaco, S. and Normand-Cyrot, D., 1985) es una expresión del modelo discreto en forma de serie de potencias del período de muestreo a partir de la que se puede diseñar el control, considerando como modelo aproximado el que se obtiene despreciando los términos de potencia mayor a una dada. Tal metodología se sigue en Guillaume, A. *et al.* (1994) para la estabilización de una cierta clase de sistemas no lineales analíticos, obteniéndose una estabilización de los estados muestreados a un entorno del cero.

En este trabajo consideramos el problema de estabilización asintótica de una clase de sistemas no lineales, más general que la tratada en Guillaume, A. *et al.* (1994). Para resolverlo diseñamos un control continuo que asegura la estabilización asintótica y lo implementamos mediante *sampling and zero-order-hold*. Un detallado análisis que tiene en cuenta la naturaleza continua de la planta, muestra que es posible obtener con el control muestreado la estabilidad asintótica lograda por la ley continua. Asimismo se obtienen en forma explícita cotas inferiores para el período de muestreo que garantizan la estabilidad, y una relación entre tal período y la velocidad de convergencia a cero.

2 CLASE DE SISTEMAS A ESTABILIZAR

En este trabajo consideraremos los sistemas no lineales afines, es decir aquellos sistemas modelados por ecuaciones diferenciales del tipo

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, y $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Supondremos sin perder generalidad que $x = 0$, $u = 0$ es un equilibrio de (1). El problema a tratar, consiste en obtener la estabilización asintótica del sistema (1) alrededor de $x = 0$, empleando una ley de control realimentada discreta para lograr el objetivo.

Asumiremos que el sistema es de clase C^1 y equivalente por realimentación y cambio de coordenadas a uno lineal estabilizable; más precisamente que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. H1. f y G son funciones C^1 en un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene al origen.
2. H2. Existen un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ de clase C^1 , con $\varphi(0) = 0$, y una realimentación estática linealizante también de clase C^1

$$u = \alpha(w) + \beta(w)v$$

con $w \in W$, y $v \in \mathbb{R}^m$, tal que el sistema dado por (1), con esta realimentación, se escribe en las nuevas coordenadas $w = \varphi(x)$:

$$\dot{w} = Aw + Bv.$$

3. H3. El par (A, B) es estabilizable, es decir, existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\Sigma = A + BK \quad (2)$$

es Hurwitz estable.

Observación 2.1 Condiciones suficientes sobre f y G para que las hipótesis H2 y H3 sean verificadas, pueden encontrarse en Hunt, L. R., *et al.* (1983); Isidori, I., (1989) y Nijmeijer, H. and van der Schaft, A., (1990); entre otros.

Observación 2.2 Esta clase de sistemas generaliza la tratada por Guillaume, A. *et al.* (1994), pues allí se asumen f y G analíticas y se considera el cambio de coordenadas $\varphi(x) = x$, es decir la identidad.

3 LEY DE CONTROL MUESTREADA

En esta y las secciones siguientes supondremos a \mathbb{R}^n dotado con una norma $\|\cdot\|$ y denotaremos con $B(x, R)$ y $\overline{B}(x, R)$ a la bola abierta centrada en x de radio R y a su clausura, respectivamente. $\|A\|$ denotará la norma que la matriz A posee como operador lineal entre espacios lineales normados.

De las hipótesis H1. - H3. de la sección anterior se deduce que con la ley de control realimentado

$$u_c = \alpha(w) + \beta(w)Kw, \quad (3)$$

el lazo cerrado (1)-(3), en las coordenadas w , verifica la ecuación

$$\dot{w} = \Sigma w. \quad (4)$$

Luego, se tiene $w(t) = e^{\Sigma t}w(0)$ y como

$$\|e^{\Sigma t}\| \leq C(\Sigma)e^{-\alpha t} \quad (5)$$

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{-\alpha t}, \quad (6)$$

con $C(\Sigma) \geq 1$ y $\alpha > 0$, resulta que la ley de control (3) estabiliza exponencialmente al sistema en las coordenadas w y por lo tanto, vía el difeomorfismo φ , también lo hace en las coordenadas originales x , aunque en general en forma asintótica. Por lo tanto, tal ley resuelve el problema de regulación de los estados a cero.

Una posible implementación de esta ley en una computadora digital, consiste en muestrearla a una frecuencia de muestreo dada. Tal muestreo se traduce en una ley del tipo

$$u(t) = \alpha(w(t_n)) + \beta(w(t_n))Kw(t_n) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}), \quad (7)$$

donde $t_n = n\delta$, y δ es el período de muestreo.

Notación: denotamos con $(\cdot)^\delta$ al operador de *sampling and zero-order-hold* definido por

$$h^\delta(t) = h(n\delta) \quad \forall t \in [n\delta, (n+1)\delta).$$

Entonces el control definido en (7) no es otra cosa que u_c^δ .

3.1 Comportamiento a lazo cerrado

Al aplicar el control u_c^δ al sistema (1), se tiene en las coordenadas w que la ecuación del lazo cerrado es

$$\dot{w} = \Sigma w + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\varphi^{-1}(w))G(\varphi^{-1}(w))(u_c^\delta - u_c). \quad (8)$$

De (3), (7) y definiendo

$$H(w) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\varphi^{-1}(w))G(\varphi^{-1}(w))$$

$$\theta(w, w^\delta) = H(w) [\alpha(w^\delta) - \alpha(w) + \beta(w^\delta)Kw^\delta - \beta(w)Kw],$$

(8) se escribe

$$\dot{w} = \Sigma w + \theta(w, w^\delta). \quad (9)$$

Comenzaremos el análisis, demostrando la existencia de $\delta^* > 0$ tal que para $\delta < \delta^*$ la estabilidad de (9) alrededor de $w = 0$ queda garantizada; entonces la estabilidad del lazo cerrado (1)-(7) alrededor de $x = 0$ también queda garantizada.

Previamente necesitamos demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.1 Dado $R > 0$ tal que $\overline{B(0, R)} \subset W$, existe una constante $L_1(R) \geq 0$ tal que $\forall w, w' \in B(0, R)$,

$$\|\theta(w, w')\| \leq L_1 \|w - w'\|. \quad (10)$$

Demostración: Es consecuencia de la compacidad y convexidad de $\overline{B(0, R)}$, de la continuidad de G y del hecho de que α, β, φ y φ^{-1} son C^1 . ■

Teorema 3.1 Dado R en las condiciones de la proposición anterior, existen $\delta^*(R) > 0$ y $r(R) > 0$ tales que para $\delta < \delta^*(R)$ y $w(0) \in B(0, r(R))$, la solución de (9) correspondiente a $w(0)$ cumple para todo $t > 0$:

1. $w(t) \in B(0, R)$,
2. $\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|$, con $C(\Sigma)$ como en (5).

Demostración: Sea $r(R) = R/C(\Sigma)$, con $C(\Sigma)$ como en (5) y $L_1 = L_1(R)$ como en (10). Para $w(0) \in B(0, r(R))$ sea $\eta > 1$ tal que $C(\Sigma)\|w(0)\|\eta \triangleq R_\eta < R$ y consideremos

$$\mathcal{A}_\eta = \{t > 0 : \|w(\tau)\| < R_\eta, 0 \leq \tau < t\}.$$

Al ser $\|w(0)\| < R_\eta$, $\mathcal{A}_\eta \neq \emptyset$ por el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales. De (9), (5), (10) y la fórmula de variación de las constantes, obtenemos para $t \in \mathcal{A}_\eta$,

$$\|w(t)\| \leq e^{-\alpha t} C(\Sigma) \left[\|w(0)\| + L_1 \int_0^t e^{\alpha \tau} \|w(\tau) - w^\delta(\tau)\| d\tau \right] \quad (11)$$

Por otra parte si $[\cdot]$ es la función *parte entera*

$$w(\tau) - w^\delta(\tau) = w(\tau) - w([\tau/\delta]\delta) = \int_{[\tau/\delta]\delta}^\tau \dot{w}(s) ds, \quad (12)$$

entonces si $\tau < t \in \mathcal{A}_\eta$ de (9), (10) y de la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\begin{aligned} \|w(\tau) - w^\delta(\tau)\| &\leq \int_{[\tau/\delta]\delta}^\tau \|\Sigma\| \|w(s)\| ds + \int_{[\tau/\delta]\delta}^\tau L_1 \|w(s) - w^\delta(s)\| ds \quad (13) \\ &\leq \|\Sigma\| e^{L_1 \delta} R_\eta. \quad (14) \end{aligned}$$

Reemplazando (14) en (11) e integrando resulta

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{-\alpha t} + \frac{C(\Sigma)L_1\|\Sigma\|e^{L_1\delta}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})R_\eta.$$

Tomando $0 < \delta < \delta^*$ con

$$\delta^* = \sup \left\{ \delta : e^{L_1\delta} \delta < \frac{\alpha}{C(\Sigma)L_1\|\Sigma\|} \right\} > 0$$

y llamando $\gamma = C(\Sigma)L_1\|\Sigma\|e^{L_1\delta}/\alpha < 1$, la desigualdad

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{-\alpha t} + \gamma R_\eta(1 - e^{-\alpha t}) < R_\eta < R, \quad (15)$$

es cierta para todo $t \in \mathcal{A}_\eta$. Mostraremos ahora que $\mathcal{A}_\eta = [0, +\infty)$, si esto último no es cierto $\sup\{t : t \in \mathcal{A}_\eta\} = t^* < +\infty$. De la desigualdad (15)

$$\limsup_{t \rightarrow t^*} \|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{-\alpha t^*} + \gamma R_\eta(1 - e^{-\alpha t^*}) < R_\eta < R. \quad (16)$$

Por el teorema de prolongación de las soluciones de ecuaciones diferenciales y por la continuidad de la solución, resulta que $w(t)$ puede prolongarse en un intervalo $[t^*, t')$ con $t' > t^*$ y $t' \in \mathcal{A}_\eta$, lo cual contradice la definición de t^* , entonces $\mathcal{A}_\eta = [0, +\infty)$.

Haciendo $\eta \rightarrow 1$, resulta que $R_\eta \rightarrow C(\Sigma)\|w(0)\|$ y entonces obtenemos $\forall t > 0$

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|,$$

quedando demostrado el teorema. ■

Observación 3.1 En el teorema anterior $r(R) = R/C(\Sigma)$ y

$$\delta^*(R) = \sup \left\{ \delta : e^{L_1(R)\delta} \delta < \frac{\alpha}{C(\Sigma)L_1(R)\|\Sigma\|} \right\}.$$

Observación 3.2 Fijando $R > 0$, la región de condiciones iniciales $B(0, r(R))$ para las cuales está garantizado que la solución de (9) no escapa de $B(0, R)$ y es estable, es independiente del período de muestreo δ , en tanto y en cuanto $\delta < \delta^*$.

En lo que sigue, mediante un análisis más preciso de la evolución del lazo cerrado, vamos a demostrar que no sólo es posible obtener estabilidad para $\delta < \delta^*$, sino más aún estabilidad asintótica.

Los dos resultados técnicos siguientes serán necesarios para demostrar la estabilidad asintótica anunciada.

Proposición 3.2 Dado $\gamma > 0$ sea $\Gamma(n)$ la función definida en forma recursiva como

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= 1, \\ \Gamma(n) &= e^{-\alpha n \delta} \left(1 + \sum_{k=1}^n \gamma \Gamma(k-1) (e^{\alpha k \delta} - e^{\alpha(k-1)\delta}) \right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\Gamma(n) = (\gamma + (1 - \gamma)e^{-\alpha \delta})^n.$$

Demostración: Lo demostraremos por inducción en n . Un sencillo cálculo muestra la validez de la proposición para $n = 1$.

Supondremos ahora que es válida para n y demostraremos que lo es para $n + 1$. De la definición recursiva de Γ , puede comprobarse fácilmente que

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= e^{-\alpha\delta}\Gamma(n) + \gamma\Gamma(n)(1 - e^{-\alpha\delta}) \\ &= \Gamma(n)(\gamma + (1 - \gamma)e^{-\alpha\delta}) \\ &= (\gamma + (1 - \gamma)e^{-\alpha\delta})^{n+1}\end{aligned}$$

Observación 3.3 si $\gamma < 1$ entonces $\Gamma(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 3.3 Sean δ y α reales positivos y sea $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua y acotada por un número M . Supongamos además que

$$f(t) \leq Me^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon(s)ds \quad (17)$$

con $0 \leq \varepsilon(s) \leq c \sup\{f(\tau) : \tau \geq [s/\delta]\delta\}$, $\forall s \geq 0$ y $c/\alpha \triangleq \gamma < 1$.

Entonces, para $t \geq n\delta$, se cumple

$$f(t) \leq M\Gamma(n)(e^{-\alpha(t-n\delta)} + \gamma(1 - e^{-\alpha(t-n\delta)}))$$

Demostración: lo demostraremos por inducción en n .

Como $\varepsilon(s) \leq cM \forall s \geq 0$, acotando $\varepsilon(s)$ en (17) e integrando obtenemos para $t \geq 0$ que

$$f(t) \leq M(e^{-\alpha t} + \gamma(1 - e^{-\alpha t})),$$

lo cual muestra que la proposición es cierta para $n = 0$. Supongamos ahora que es válida para $k \leq n$, entonces $f(t) \leq M\Gamma(k-1)$ si $t \geq (k-1)\delta$ con $k = 1, \dots, n+1$ y

$$f(t) \leq M\Gamma(n)(e^{-\alpha\delta} + \gamma(1 - e^{-\alpha\delta})) = M\Gamma(n+1)$$

si $t \geq (n+1)\delta$. Por lo tanto $\varepsilon(s) \leq cM\Gamma(k-1)$ si $s \in [(k-1)\delta, k\delta)$ con $k = 1, \dots, n+1$ y $\varepsilon(s) \leq cM\Gamma(n+1)$ si $s \geq (n+1)\delta$. Sea $t \geq (n+1)\delta$, de (17)

$$f(t) \leq Me^{-\alpha t} + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon(s)ds + \int_{(n+1)\delta}^t e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon(s)ds.$$

Acotando $\varepsilon(s)$ e integrando llegamos a que

$$f(t) \leq Me^{-\alpha t} \left[1 + \sum_{k=1}^{n+1} \gamma\Gamma(k-1)(e^{\alpha k\delta} - e^{\alpha(k-1)\delta}) \right] + Me^{-\alpha t}\Gamma(n+1)\gamma(e^{\alpha t} - e^{\alpha(n+1)t})$$

De la definición recursiva de Γ obtenemos

$$\begin{aligned}f(t) &\leq Me^{-\alpha(t-(n+1)\delta)}\Gamma(n+1) + \\ &+ M\gamma\Gamma(n+1)(1 - e^{-\alpha(t-(n+1)\delta)}) \leq \\ &\leq M\Gamma(n+1)(e^{-\alpha(t-(n+1)\delta)} + \gamma(1 - e^{-\alpha(t-(n+1)\delta)})),\end{aligned}$$

con lo cual finaliza la demostración. ■

Del siguiente teorema deduciremos luego como corolario la estabilidad asintótica.

Teorema 3.2 Sean $R > 0$ tal que $\overline{B(0, R)} \subset W$, $\delta < \delta^*(R)$ y $w(0) \in B(0, r(R))$, entonces existe $\gamma = \gamma(R, \delta) < 1$, tal que $\forall t \geq n\delta$, se verifica

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|\Gamma(n) \left[e^{-\alpha(t-n\delta)} + \gamma(1 - e^{-\alpha(t-n\delta)}) \right] \quad (18)$$

Demostración: Por el teorema 3.1, si $w(0) \in B(0, r(R))$, resulta $\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\| \forall t > 0$. De (11) obtenemos

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau,$$

con $\varepsilon(\tau) = C(\Sigma)L_1\|w(\tau) - w^\delta(\tau)\|$. Partiendo de (13) y aplicando Gronwall

$$\begin{aligned}\|w(\tau) - w^\delta(\tau)\| &\leq \\ &\|\Sigma\|e^{L_1\delta} \sup \left\{ \|w(s)\| : s \geq \left[\frac{\tau}{\delta} \right] \delta \right\}.\end{aligned} \quad (19)$$

Entonces como $\delta < \delta^*$, $c \triangleq C(\Sigma)\|\Sigma\|L_1e^{L_1\delta}$ es tal que $c/\alpha \triangleq \gamma < 1$ y además

$$\|\varepsilon(t)\| \leq c \sup \left\{ \|w(s)\| : s \geq \left[\frac{t}{\delta} \right] \delta \right\}.$$

Entonces tomando $M \triangleq C(\Sigma)\|w(0)\|$, $\|w(t)\|$ y $\varepsilon(t)$ están en las condiciones de la proposición 3.3, obteniéndose inmediatamente la tesis del teorema. ■

Observación 3.4 En el teorema anterior,

$$\gamma = \frac{C(\Sigma)L_1(R)\|\Sigma\|e^{L_1(R)\delta}}{\alpha} \quad (20)$$

Corolario 3.1 Dados R, δ y $w(0)$ como en el teorema anterior, entonces

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|(\gamma + (1 - \gamma)e^{-\alpha\delta})^{\lceil \frac{t}{\delta} \rceil} \quad (21)$$

Demostración: es inmediata a partir de (18) y de la definición de Γ , pues para $t > 0$ y por ser $\gamma < 1$

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|\Gamma(\lceil t/\delta \rceil).$$

De esto se deduce que el control muestreado hace al lazo cerrado (1)-(7) asintóticamente estable, pues es estable y además debido a la Observación 3.3, $w(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, con lo cual también $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow +\infty$.

Como hemos notado al comienzo, la ley de control continua (3) estabiliza exponencialmente al sistema en las coordenadas w . Como veremos en el siguiente corolario del teorema 3.2, tal propiedad no se pierde al emplear la ley muestreada (7).

Corolario 3.2 Dados $R > 0$ como antes y α' tal que $0 < \alpha' < \alpha$, existe $\delta(\alpha')$ tal que $\forall 0 < \delta \leq \delta(\alpha')$, si $\|w(0)\| < r(R)$, entonces se verifica

$$\|w(t)\| \leq C(\Sigma)\|w(0)\|e^{\alpha'\delta}e^{-\alpha't}.$$

Demostración: tomemos α' tal que $0 < \alpha' < \alpha$, entonces (21) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \|w(t)\| &\leq C(\Sigma)\|w(0)\| \left[\gamma e^{\alpha'\delta} + (1-\gamma)e^{(\alpha'-\alpha)\delta} \right]^{[t/\delta]} \\ &\quad e^{-\alpha't + \alpha'(t-[t/\delta]\delta)} \\ &\leq C(\Sigma)\|w(0)\| \left[\gamma e^{\alpha'\delta} + (1-\gamma)e^{(\alpha'-\alpha)\delta} \right]^{[t/\delta]} \\ &\quad e^{\alpha'\delta}e^{-\alpha't}. \end{aligned}$$

Basta probar ahora que existe $\delta(\alpha') > 0$ para el cual, si $\delta \leq \delta(\alpha')$ entonces

$$f(\delta) \triangleq \gamma e^{\alpha'\delta} + (1-\gamma)e^{(\alpha'-\alpha)\delta} \leq 1.$$

Un simple cálculo muestra, teniendo en cuenta (20), que $f(0) = 1$ y $f'(0) = -\alpha + \alpha' < 0$, por lo que la existencia de tal $\delta(\alpha')$ está garantizada. ■

Este resultado demuestra que una elección adecuada del período de muestreo asegura la convergencia exponencial a cero del sistema, con velocidad de convergencia arbitrariamente cercana a la del sistema controlado por la ley continua.

4 SIMULACIONES

En esta sección se muestra la aplicación de los resultados anteriores para la estabilización del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2(1 - e^{-x_2}) [e^{x_2} - x_2(x_1 + x_2^2)] \\ \quad - x_2 [1 + (x_1 + x_2^2)^2] e^{-x_2} u \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2^2)(1 - e^{-x_2}) + \frac{1+(x_1+x_2^2)^2}{2} e^{-x_2} u. \end{cases} \quad (22)$$

El difeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (-2, +\infty)$,

$$(w_1, w_2) = \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2, 2(e^{x_2} - 1))$$

transforma al sistema (22) en el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 \\ \dot{w}_2 = w_1 w_2 + (1 + w_1^2) u \end{cases}$$

Para este sistema consideraremos el control estabilizante

$$u = -\frac{w_1 w_2}{1 + w_1^2} - \frac{2w_1 + 3w_2}{1 + w_1^2}, \quad (23)$$

y para este control se tiene, de (2),

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

En los cálculos que siguen adoptaremos para \mathbb{R}^2 la norma euclídea.

Para la matriz Σ , obtenemos en (5), $C(\Sigma) = 1.1$ y $\alpha = 1$. Por otra parte, como $W = \mathbb{R} \times (-2, +\infty)$, consideraremos

$R = 1$ y $B(0, R) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| < 1\}$. Entonces, resulta en (10), $L_1 = 3.621$ y en (17) $\delta^* = 0.016$.

En las figuras 1 a 4 mostramos los resultados de la simulación de la estabilización del sistema (22), $((x1d, x2d))$ al aplicarle el control $u_c^\delta = ud$ correspondiente al control u de (23) para $\delta = 0.015$.

También mostramos, a modo de contraste, la estabilización de dicho sistema $((x1, x2))$ mediante el control u de (23). Las condiciones iniciales que adoptamos son $x1d(0) = 0.6155$, $x2d(0) = 0.3027$, correspondientes a $w1(0) = w2(0) = 0.707$, que son las condiciones más exigentes.

En la figura 1 se muestran las evoluciones $x1d$ y $x1$ del primer estado. Se vé que a partir de $t = 4$ seg. las mismas prácticamente coinciden.

En la figura 2, y con un comportamiento similar, se pueden ver las evoluciones $x2d$ y $x2$ del segundo estado.

La figura 3 muestra el control estabilizante u y el muestreado ud .

La figura 4 es un detalle de la figura anterior donde se aprecia el efecto de muestreo.

Referencias

- Arapostathis, A., Jakubczyk, B., Lee, H.-G., Marcus, S.I. and Sontag, E.D., 1989 "The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization, *Systems and Control Letters*, vol. 13, pp. 373-381.
- Castillo, B., Di Genaro, S., Monaco and S., Normand-Cyrot, D., 1993 "Nonlinear regulation for a class of discrete-time systems, *Systems and Control Letters*, vol. 20, pp. 57-65.
- Grizzle, J.W. and Kokotovic, V., 1988 "Feedback Linearization of Sampled-Data Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 857-859.
- Guillaume, A.-M., Bastin, G. and Campion, G., 1994 "Sampled-data adaptive control of a class of continuous nonlinear systems, *Int. J. Control*, vol. 4, pp. 569-594.
- Hunt, L. R., Meyer, G., 1983 "Desing for Multi-Input Nonlinear Systems, *Differential Geometric Control Theory* (R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann, eds.) Birkhauser, Boston.
- Isidori, I., 1989 *Nonlinear Control Systems, an Introduction*, 2da ed., Berlin: Springer.
- Jakubczyk, B., 1987 "Feedback linearization of discrete-time systems, *Systems and Control Letters*, vol. 9, pp. 411-416.
- Lee, H.-G. and Marcus, S.I., 1986 "Approximate and local linearizability of non-linear discrete-time systems, *Int. J. Control*, vol. 44, pp. 1103-1124.
- Lee, H.G., Arapostathis, A. and Marcus S.I., 1987 "Linearization of discrete-time systems, *Int. J. Control*, vol. 45, pp. 1803-1822.
- Monaco, S. and Normand-Cyrot, D., 1985 "On the sampling of a linear analytic control system, *24th Conference on Decision and Control*, Ft Lauderdale, Florida, U.S.A., pp. 1457-1462.

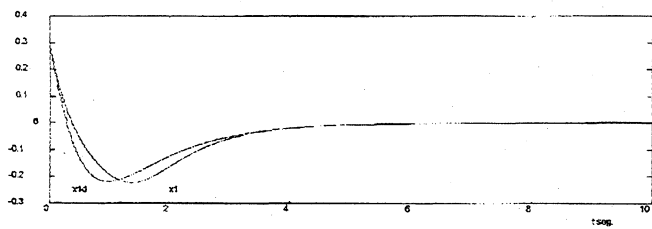


Figura 1 - Estabilización del primer estado.

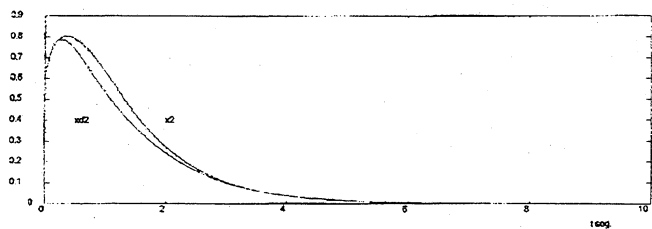


Figura 2 - Estabilización del segundo estado

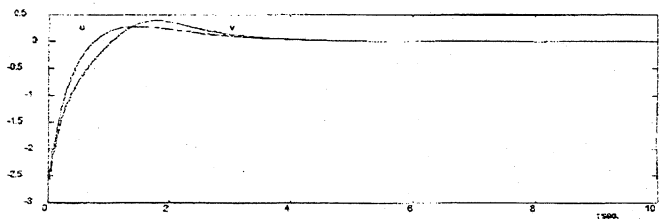


Figura 3 - Control y control muestreado.

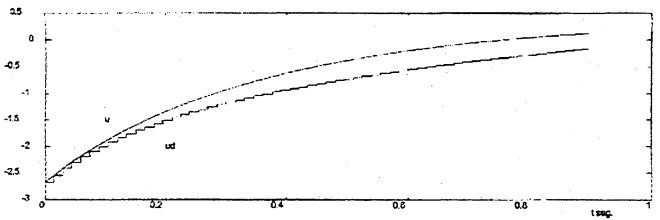


Figura 4 - Control y Control muestreado. Detalhe