

ELEMENTO FINITO UNIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICO: UM NOVO ELEMENTO “LINHA” NA ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO POR ELEMENTOS FINITOS

Viviane Cristine Silva José Roberto Cardoso Nancy Mieko Abe Angelo Passaro

LMAG - Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado - PEA-EPUSP - Av. Prof. Luciano Gualberto, Trav. 3, nº 158

05508-900 São Paulo SP - Tel.: (011) 818 5415 - Fax: (011) 818 5719 - E-mail: cardoso@pea.usp.br

Resumo - O elemento “linha” tradicional usado no modelamento de regiões longas e delgadas na análise por elementos finitos tridimensional (como é o caso, por exemplo, de condutores finos cuja seção transversal é normalmente desprezível face ao seu comprimento) em geral não leva em conta a variação de grandezas relevantes na direção radial, mas apenas ao longo de seu comprimento. O método proposto apresenta uma maneira simples e original de contornar este problema utilizando um elemento especial com propriedades físicas anisotrópicas. Demonstra-se que a abordagem é adequada no modelamento tridimensional de sistemas de aterramento.

Abstract. Traditional line-element approaches used by treating long slim regions in 3D domains studied by FEA do not usually take into account the variation of relevant quantities in the radial direction to the 1D element. The method proposed here presents a simple way to deal with these elements by replacing them by ones with anisotropic properties. The method is suitable for the analysis of grounding systems.

1. INTRODUÇÃO

A aproximação unidimensional normalmente adotada na análise por elementos finitos de domínios tridimensionais, usada para modelar elementos com seção transversal desprezível face ao seu comprimento, tem sido amplamente utilizada por autores que se utilizam do Método dos Elementos Finitos (MEF), em particular aqueles que se ocupam do estudo de sistemas de aterramento (B. Nekhoul *et alii*, 1995; B. Nekhoul *et alii*, 1995a). A técnica consiste basicamente em substituir as hastes e condutores de uma malha de aterramento por um simples elemento “linha”, evitando dessa forma a sua discretização em elementos finitos, normalmente tetraedros, o que seria impraticável face à geometria desses condutores. A integração sobre cada elemento é realizada de tal forma que a função potencial é tomada constante segundo a seção transversal dos condutores, e variando apenas ao longo de seu comprimento.

Esta aproximação tem sido utilizada inclusive pelos autores (Cardoso, 1993; Cardoso, 1994), ainda que apresentando precisão não satisfatória, devido à ausência de uma técnica eficiente para solucionar esta questão. Em vista do exposto, a

metodologia apresentada neste trabalho procura justamente propor uma alternativa para estas limitações. A metodologia foi usada para o cálculo da resistência de aterramento e os resultados, comparados a valores teóricos e experimentais.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considere um sistema de aterramento simplificado composto de uma única haste de material com alta condutividade, enterrada verticalmente num solo homogêneo, como ilustra a Fig. 1. A equação que governa o fenômeno de condução elétrica estática, ou seja, um campo de correntes estacionárias, é a equação de Laplace, dada por:

$$\operatorname{div}(-\sigma \operatorname{grad} \phi) = 0$$

sendo o potencial escalar elétrico, ϕ , a variável de estado. Após a aplicação do método de Galerkin e do teorema de Green sobre um elemento do condutor (indicado pelo índice C), obtém-se:

$$\iiint_{\Omega_C} \nabla N_i \sigma_C \nabla \phi_C d\Omega = 0, \quad (1)$$

sendo N_i as funções de ponderação do método dos resíduos ponderados que, no método de Galerkin, coincidem com as funções de forma; ϕ_C o potencial num elemento do condutor (haste), σ_C a condutividade de um elemento da haste e Ω_C seu volume.

A aproximação usual do elemento “linha” permite que a equação (1) seja escrita como:

$$\iiint_{\Omega_C} \nabla N_i \sigma \nabla \phi_C dS dz = S \int_z \nabla N_i \sigma \nabla \phi_C dz, \quad (2)$$

com $S = \pi R^2$ representando a seção transversal do condutor (ver Fig. 1) e L seu comprimento. ϕ pode ser escrito na sua forma interpolada como:

$$\phi = \sum_j N_j \phi_j$$

Dessa forma, a submatriz elementar para uma discretização de primeira ordem fica:

$$S \int_z \nabla N_i \sigma \nabla N_j dz = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \quad (3)$$

com G dado por:

$$G = \frac{\sigma S}{L} \quad (4)$$

Como foi citado anteriormente, essa abordagem despreza a corrente que flui radialmente do condutor para o solo. Na opinião dos autores essa é a razão pela qual se obtém valores imprecisos de resistência de aterramento.

A metodologia proposta parte da equação (1) e procura seguir o mesmo raciocínio apresentado em (C. Guérin, 1994), só que lá, aplicado a elementos tipo "shell" (bidimensionais). Adota-se a seguinte hipótese para o potencial ϕ :

$$\phi_c = \phi_c(r, \theta, z) = \phi_s(r, \theta) + \phi_z(z) \quad (5)$$

ou seja, assume-se que as variações de ϕ segundo as direções radial e axial são independentes (em outras palavras, desacopladas). Após aplicação da técnica de Galerkin e fazendo:

$$\phi_s = \sum_j N'_j \phi_{sj}, \quad \phi_z = \sum_j N''_j \phi_{zj}$$

com N'_j e N''_j as funções de forma do elemento, segue-se que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_c} \nabla N_i [\sigma] \nabla \phi_c d\Omega &= \iiint_{\Omega_c} \nabla N'_i \sigma_s \nabla \phi_s d\Omega + \\ &\quad \iiint_{\Omega_c} \nabla N''_i \sigma_z \nabla \phi_z d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

Aqui a condutividade da haste, que geralmente é representada como uma grandeza escalar, foi substituída por um tensor de condutividade $[\sigma]$, dado por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

com σ_s representando a condutividade segundo a direção radial e σ_z , aquela segundo a direção axial. A justificativa para esta substituição será dada mais adiante.

Assumindo que $\phi(\theta)$ é constante (isto é, não ocorre variação periférica), o primeiro termo do lado direito da equação (6) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_c} \nabla N'_i \sigma_s \nabla \phi_s d\Omega &= \iiint_{r, \theta, z} \nabla N'_i \sigma_s \nabla \phi_s r dr d\theta dz = \\ &\quad \sigma_s 2\pi L \int_r \nabla N'_i \nabla \phi_r r dr \end{aligned} \quad (8)$$

Seguindo um procedimento similar ao adotado na aproximação axissimétrica, adota-se $r \approx \frac{1}{2}R$, o raio médio do condutor, o que conduz a:

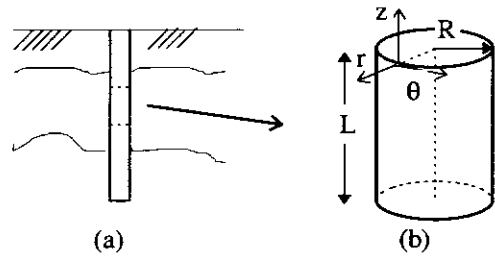


Fig. 1. (a) Um sistema de aterramento simplificado composto de uma haste enterrada verticalmente; (b) uma porção elementar da haste.

$$\iiint_{\Omega_c} \nabla N'_i \sigma_s \nabla \phi_s d\Omega = \sigma_s \pi L R \int_r \nabla N'_i \nabla \phi_r dr \quad (9)$$

Novamente, assumindo uma discretização de primeira ordem, a equação (7) conduz à seguinte submatriz de elemento "linha":

$$M_s = \begin{bmatrix} G_s & -G_s \\ -G_s & G_s \end{bmatrix}, \quad (10)$$

com G_s dado por:

$$G_s = \sigma_s \pi L. \quad (11)$$

Aplicando o mesmo procedimento ao segundo termo de (6), chega-se a:

$$\iiint_{\Omega_c} \nabla N''_i \sigma_z \nabla \phi_z d\Omega = \sigma_z S \int_z \nabla N''_i \nabla \phi_z dz, \quad (12)$$

que resulta na seguinte submatriz de elemento "linha":

$$M_z = \begin{bmatrix} G_z & -G_z \\ -G_z & G_z \end{bmatrix}, \quad (13)$$

com G_z dado por:

$$G_z = \frac{\sigma_z S}{L} \quad (14)$$

Dessa forma, o elemento de condutor mostrado na Fig. 1 pode ser substituído por "dois" elementos "linha": o primeiro representando a variação na direção axial, e o segundo representando a variação na direção radial, como ilustrado na Fig. 2.

3. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA VS. INTERPRETAÇÃO FÍSICA

Com relação ao método proposto, imediatamente coloca-se a questão de como introduzir a contribuição desta segunda submatriz elementar na matriz global do sistema. Quanto a essa questão, a submatriz M_z não apresenta nenhum problema, ao contrário de M_s .

A contribuição de M_z na matriz global do MEF é introduzida da maneira usual adicionando as contribuições dos nós 1 e 2 da Fig. 2 nas suas respectivas posições. Entretanto, a introdução da contribuição de M_s na matriz global não é nada evidente, já

que os nós 3 e 4 na verdade não “existem” na malha de elementos finitos do domínio em questão. A solução para esse impasse vem do significado físico de M_s e M_z . Nota-se que os coeficientes dessas matrizes representam as condutâncias do elemento em cada direção. Então, o elemento “linha” radial 3-4 pode ser separado em dois outros, cada um associado a cada nó do elemento “linha” axial 1-2, como ilustrado na Fig. 3.

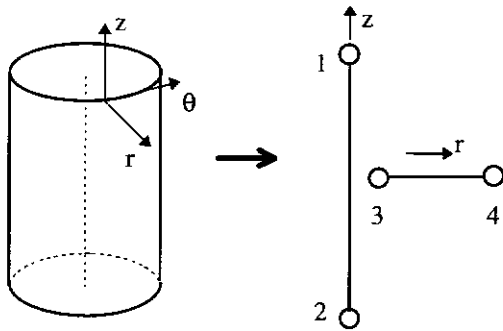


Fig. 2. Uma porção elementar de um condutor e sua representação através de dois elementos “linha”.

Assim, também a contribuição para a matriz global de M_s pode ser desmembrada em duas fazendo:

$$M_r = \frac{1}{2} M_s,$$

$$G_r = \frac{1}{2} G_s = \frac{\sigma_s \pi L}{2},$$

e

$$M_r = \begin{bmatrix} G_r & -G_r \\ -G_r & G_r \end{bmatrix}, \quad (15)$$

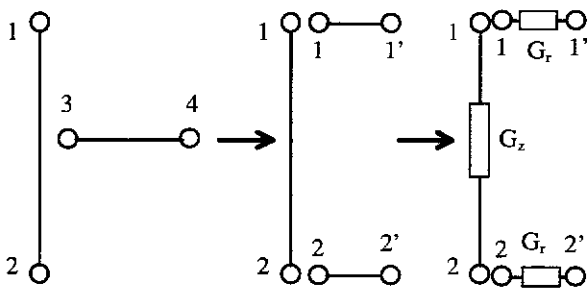


Fig. 3. Representação através de 2 elementos “linha” de um elemento de condutor e seu diagrama de impedâncias equivalente.

que fornece a contribuição do elemento “linha” radial aos nós 1, 2, 1' e 2', sendo 1' e 2' nós “virtuais”, ou seja, nós que, do ponto de vista geométrico, são coincidentes com os nós 1 e 2. Tal elemento é também conhecido como elemento a salto de potencial, já que para um mesmo nó da malha de elementos finitos tem-se dois valores distintos de potencial.

Como pode-se observar pela Fig. 3, essa abordagem usando dois elementos “linha”, ou como chamaremos doravante, elemento “linha” a salto de potencial, pode ser representada por um diagrama de impedâncias equivalente, e permite que a contribuição de regiões longas e delgadas em domínios

tridimensionais seja considerada sem a necessidade de malhar essas regiões.

Agora torna-se necessário justificar o uso de uma característica anisotrópica para modelar a condutividade do novo elemento e definir que valores serão adotados para cada direção. São eles:

$$\sigma_z = \sigma_{condutor}, \quad \sigma_s = \sigma_{solo}$$

Isto porque, *grosso modo*, o volume do condutor foi substituído por uma linha e o espaço vazio deixado por ele, preenchido com o solo.

Esse procedimento mostrou ser eficiente pois ele contribui para melhorar o condicionamento numérico do sistema de equações final a ser resolvido. Além disso, o método é de fácil implementação e sua introdução em códigos de elementos finitos já existentes é direta, mesmo nos casos de malhadores que utilizam elementos de segunda ordem.

4. RESULTADOS

A metodologia proposta, utilizando o elemento “linha” a salto de potencial, foi implementada no programa GROUND-3D (Cardoso, 1993; Cardoso, 1994), um programa computacional tridimensional baseado no MEF, concebido especialmente para o modelamento de sistemas de aterramento. Os resultados foram comparados com métodos analíticos e com resultados de teste através de três exemplos.

A. Caso 1 - Uma haste enterrada

Consiste em uma única haste condutora de cobre de 2,5 m de comprimento e 9,52 mm de raio, enterrada verticalmente num solo homogêneo de resistividade igual a 300 ohm.m.

O domínio foi discretizado em tetraedros de primeira ordem, resultando numa malha de 20.000 nós. Uma corrente de 1.000 A foi injetada na extremidade da haste. A resistência de aterramento nesse caso pode ser calculada por (ANSI-IEEE, 1986):

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{2L}{a}\right), \quad (16)$$

com ρ sendo a resistividade do solo e L e a , o comprimento e raio da haste, respectivamente.

A Tabela I mostra os valores de resistência de aterramento obtidos através de simulações utilizando o GROUND-3D (com elemento “linha” tradicional e com o novo elemento proposto: elemento “linha” a salto de potencial) e calculado através de (16). Realizaram-se também mais duas simulações, mas desta vez em duas dimensões e com simetria axial (axissimétrica), utilizando o programa FLUX2D (CEDRAT): na primeira simulação o volume da haste não foi considerado e assumiu-se que sua superfície é uma equipotencial; já na segunda, o volume da haste foi completamente discretizado. Nota-se uma melhora sensível na precisão obtida com o novo elemento com relação ao valor teórico. Além disso, observa-se a economia de nós conseguida com o método em comparação com uma simulação em duas dimensões em que se discretiza a haste.

A Fig. 4 mostra o perfil do potencial obtido na segunda simulação, com a metodologia proposta, e pela solução analítica, além do erro relativo entre os dois métodos. O máximo erro local obtido foi de 10%.

B. Caso 2: Malha igualmente espaçada com nove hastes em solo de duas camadas (ANSI-IEEE, 1986)

Este exemplo é descrito em (ANSI-IEEE, 1986) e a geometria pode ser vista na Fig. 5, que também apresenta a discretização em elementos finitos do plano no solo.

O valor da resistência de aterramento obtida pelo GROUND-3D com o elemento "linha" a salto de potencial proposto é comparada ao valor obtido pelo programa computacional de aterramento SGA, descrito no relatório final do EPRI, EL-2682 (ver ANSI-IEEE, 1986). Os resultados são mostrados na Tabela II e apresentam boa concordância.

C. Caso 3: Uma malha quadrada de 4 eletrodos

O caso é apresentado em (F.Dawalibi, D.Mukheddar, 1975) e consiste em uma malha de aterramento quadrada de 16 m \times 16m feita de condutores horizontais enterrados a 0,6 m abaixo do nível do solo. Os autores apresentam curvas experimentais mostrando o potencial elétrico segundo a direção indicada na Fig. 6. Os potenciais na superfície do solo, calculado através do GROUND-3D e medido, são mostrados na Fig. 7.

5. CONCLUSÕES

Um novo método foi proposto para modelar condutores longos e delgados na análise tridimensional por elementos finitos de sistemas de aterramento, que se baseia na adoção de um novo elemento "linha", a que chamamos elemento "linha" a salto de potencial, de forma que os eletrodos não necessitam ser discretizados. O método permite que se leve em conta na análise as correntes que fluem radialmente dos eletrodos para o

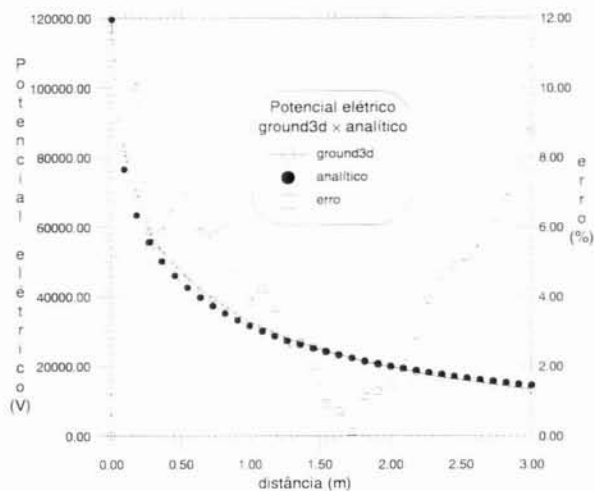


Fig. 4. Comparação entre resultados analítico e numérico (GROUND-3D).

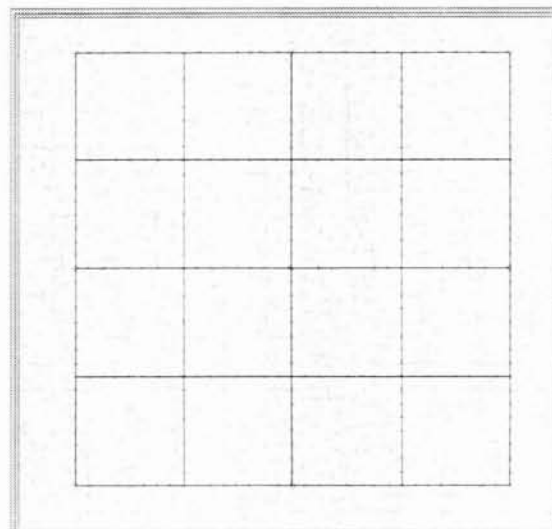


Fig. 5 - Geometria da malha de aterramento do caso 2 mostrando a malha de elementos finitos no nível do solo.

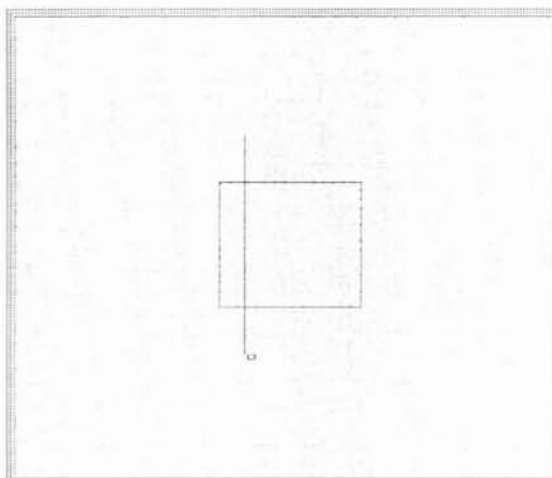


Fig. 6 - Problema 1 de F.Dawalibi e D.Mukheddar (1975): geometria mostrando malha de elementos finitos na superfície do solo e direção para o traçado do potencial.

TABELA I

Comparação da Resistência Obtida pelos Vários Métodos (Ω)

Método	Número de nós	R
Teórico (16)	-	119,630
flux2d (haste malhada)	34.000	110,981
flux2d (superfície da haste equip.)	31.000	111,623
ground-3d (elemento "linha" usual)	20.000	74,873
ground-3d (elemento proposto)	20.000	119,342

TABELA II

Comparação da Resistência de Aterramento Obtida por Vários Métodos no Caso2 (Ω)

Método	Número de nós	R
SGA (ANSI-IEEE, 1986)	-	1,353
ground-3d (elem. "linha" proposto)*	45.000	1,213

* -45 min. de CPU p/ Pentium 100 MHz

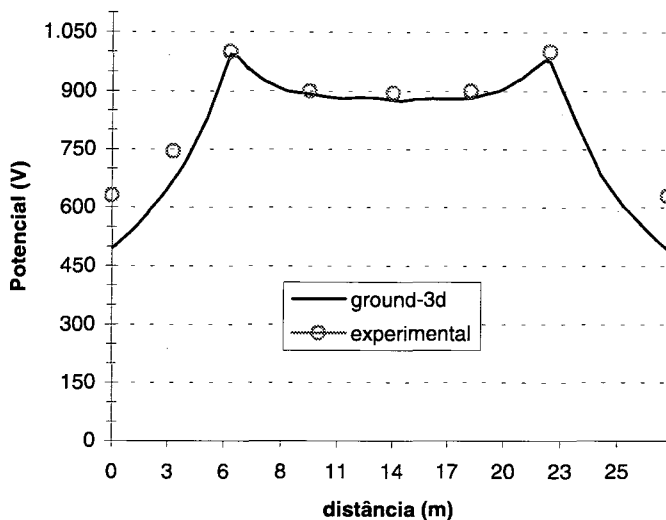


Fig. 7 - Traçado do potencial na superfície do solo segundo a direção indicada na Fig. 6; comparação numérico - experimental.

solo, ao contrário do elemento “linha” tradicional. A sua implementação em códigos de elementos finitos existentes é direta e simples, permitindo inclusive a adoção de elementos de segunda ordem. Os resultados conseguidos com esse novo método foram comparados àqueles provenientes de outros métodos: analíticos, numéricos, e também a resultados experimentais. Em todos os casos os erros obtidos foram sensivelmente menores que os obtidos com aplicação do elemento linha “tradicional” que não considera o salto de potencial.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao LEG - *Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble* - e CEDRAT-Meylan (França) pela gentileza em permitir a utilização do programa FLUX2D, e a ELETROPAULO e CNPq pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- ANSI-IEEE Guide for safety in AC substation grounding - Std 80 -1986, Appendix C, pp. 188-189.
- Cardoso J. R., September 1994 “FEM Modelling of grounded systems with unbounded approach”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, pp. 2893-2896.
- Cardoso J. R., 1993, “Ground-3D: uma contribuição à análise dos sistemas de aterramento pelo método dos elementos finitos”, Tese de Livre Docência - EPUSP - São Paulo .
- CEDRAT , 1996. FLUX2D - version 7.12 - Reference guide .
- Dawalibi F., D. Mukheddar, March/April 1975, “Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure: Part II - Comparison between theoretical and experimental results”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-94, nº 2, pp. 262-266.
- Guérin C., - September 1994 “Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de regions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en regime harmonique”, PhD thesis, INPG - France.

Nekhoul B. *et alii.* , July 1995 “Calculating the impedance of a grounding system” Proceedings of the 10th Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields - Berlin.

Nekhoul B. *et alii.*, May 1995, “A finite element method for calculating the electromagnetic fields generated by substation grounding systems”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, 2150-2153.