Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais

José C. Geromel

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
UNICAMP

SBA - WEBINAR
30 de Junho de 2022

Conteúdo

O começo ...

- Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Hurwitz estável se

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \ \forall i = 1, \cdots, n$$

  - A equação diferencial linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \ \forall \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

    é assintoticamente estável $\Longrightarrow$ convergência!
  - Há muito tempo estudadas
  - Contribuição fundamental - A. Lyapunov no final do século 19!

O começo ...

- O célebre Lema de Lyapunov estabelece que as afirmações
  - A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Hurwitz estável
  - Existe $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\begin{aligned} A'P + PA &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned}$$

  são equivalentes
  - Simples solução numérica: com $Q > 0$ qualquer, a equação (linear) de Lyapunov $A'P + PA = -Q$ é resolvida
  - Estabilidade $\iff$ $P > 0$

O começo ...

- Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Schur estável se

$$|\lambda_i(A)| < 1, \ \forall i = 1, \cdots, n$$

  - A equação a diferenças finitas

$$x_{k+1} = Ax_k, \ \forall \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

    é assintoticamente estável $\Longrightarrow$ convergência!
  - Há muito tempo estudadas
  - Contribuição fundamental - A. Lyapunov no final do século 19!

O começo ...

- O célebre Lema de Lyapunov estabelece que as afirmações
  - A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Schur estável
  - Existe $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

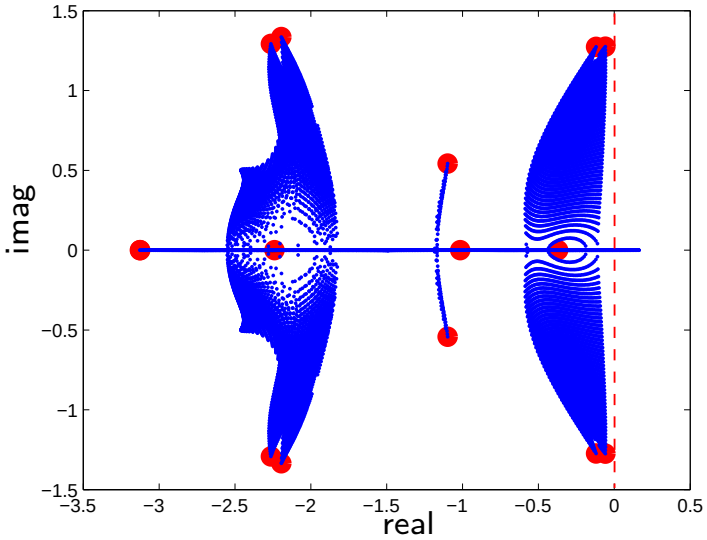
$$\begin{aligned} A'PA - P &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned}$$

  são equivalentes
  - Simples solução numérica: com $Q > 0$ qualquer, a equação (linear) de Lyapunov $A'PA - P = -Q$ é resolvida
  - Estabilidade $\iff$ $P > 0$

Em seguida ...

- Robustez - incertezas paramétricas

$$A \in \mathcal{A} = \mathrm{co}\{A_i\}_{i=1}^{N}$$



- $\{A_i\}_{i=1}^{N}$ Hurwitz estável não implica em estabilidade robusta!
- Problema de dimensão infinita!

Em seguida ...

- B. Ross Barmish[1] introduziu o conceito de estabilidade quadrática: Se existir $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$A_i' P + P A_i < 0, \;\; i = 1, \cdots, N$$
$$P > 0$$

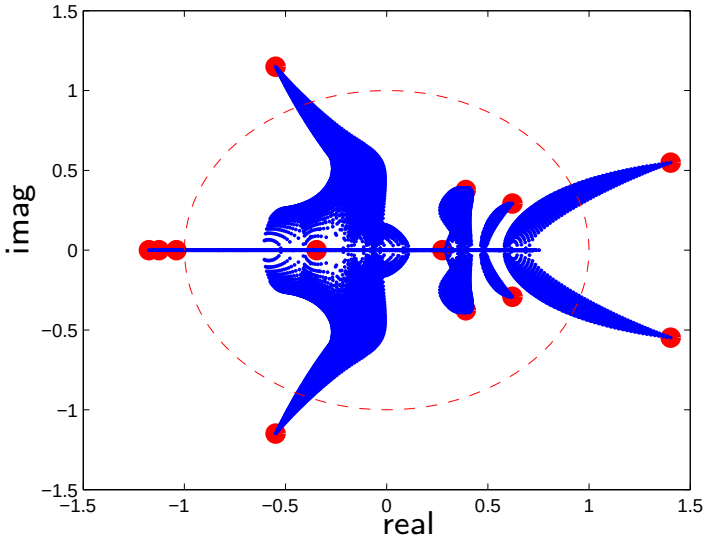
  - Qualquer matriz $A \in \mathcal{A}$ é Hurwitz estável!
  - Estabilidade robusta $\Longleftarrow$ Estabilidade quadrática $\Longleftrightarrow$ Desigualdades matriciais lineares (LMI)
  - Problema **convexo** de dimensão finita!

[1] B. R. Barmish, **Journal of Optimization Theory and Applications**, 1985.

Em seguida ...

- Robustez - incertezas paramétricas

$$A \in \mathcal{A} = \mathrm{co}\{A_i\}_{i=1}^{N}$$



- $\{A_i\}_{i=1}^{N}$ Schur estável não implica em estabilidade robusta!
- Problema de dimensão infinita!

Em seguida ...

- Também se aplica o conceito de estabilidade quadrática: Se existir $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\begin{bmatrix} P & A_i' P \\ \bullet & P \end{bmatrix} > 0, \;\; i = 1, \cdots, N$$

  - Qualquer matriz $A \in \mathcal{A}$ é Schur estável!
  - Estabilidade robusta $\Longleftarrow$ Estabilidade quadrática $\Longleftrightarrow$ Desigualdades matriciais lineares (LMI)[2]
  - Problema **convexo** de dimensão finita!

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, **Studies in Applied Mathematics - SIAM**, 1994.

Em seguida ...

- Lema de Lyapunov Generalizado[3]: Existem $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} P & A'P \\ \bullet & P \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} P & A'G \\ \bullet & G + G' - P \end{bmatrix} > 0$$

Permite ir além do conceito de estabilidade quadrática:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i'G \\ \bullet & G + G' - P_i \end{bmatrix} > 0, \ i = 1, \cdots, N$$

em que a matriz P pode agora ser diferente em cada vértice.

[3] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel, **Systems & Control Letters**, 1999.

Nos dias atuais ...

- A solução de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ com $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, avaliada nos instantes de amostragem $x(t_k) = x[k]$ em que

$$\{t_k = kh\}_{k \in \mathbb{N}}$$

satisfaz $x[k+1] = e^{Ah}x[k],\ x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

  - A matrix exponencial e^{Ah} é Schur estável
  - Existe $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\begin{aligned} e^{A'h}Se^{Ah} - S &< 0 \\ S &> 0 \end{aligned}$$

Nos dias atuais ...

- O conjunto $\mathcal{A}$ é **convexo e poliedral**, mas o conjunto

$$\mathcal{A}_h = \left\{ e^{Ah} : A \in \mathcal{A} \right\}$$

  não é **convexo** nem **poliedral!** Assim sendo, o conceito de estabilidade quadrática não pode ser diretamente aplicado.
- Geometria muito complicada. Nenhuma relação com o conjunto convexo

$$\mathrm{co}\{e^{A_i h}\}_{i=1}^{N}$$

- Assim sendo, como tratar incertezas paramétricas em sistemas lineares amostrados?

Nos dias atuais ...

- **Fundamental:** As seguintes afirmações são equivalentes:
  - Existe $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\begin{aligned} e^{A'h} S e^{Ah} - S &< 0 \\ S &> 0 \end{aligned}$$

  - Existe $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A &< 0 \\ P(0) = P(h) = S &> 0 \end{aligned}$$

denominada desigualdade matricial linear diferencial (DLMI)[4]

[4] T. R. Gonçalves, G. W. Gabriel, and J. C. Geromel, **IEEE Control Systems Letters**, 2018.

Nos dias atuais ...

- O conceito de estabilidade quadrática pode agora ser aplicado aos sistemas amostrados: Se existir $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que

$$\dot{P}(t) + A_i' P(t) + P(t) A_i < 0, \;\; i = 1, \cdots, N$$
$$P(0) = P(h) = S > 0$$

  - Qualquer matriz $e^{Ah} \in \mathcal{A}_h$ é Schur estável
  - Estabilidade robusta $\Longleftarrow$ Estabilidade quadrática $\Longleftrightarrow$ Desigualdades matriciais lineares diferenciais (DLMI)
  - Problema **convexo** de dimensão finita!

Solução numérica

- **Forma geral de uma DLMI**

$$\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t)) < 0, \;\; t \in [0, h), \;\; (P(0), P(h)) \in \Omega$$

  - $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ é um operador linear
  - Ω é um conjunto definido por LMIs

$$\Uparrow$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n_\phi} X_i \phi_i(t)$$

Solução numérica

- **Linear por partes:** Com $\eta = h/n_\phi$ and $\phi_i(t) = \phi(t - i\eta)$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\eta} & , \quad |t| \leq \eta \\ 0 & , \quad \text{fora do intervalo} \end{cases}$$

- $P(t)$ é contínua e é factível **sse**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{\eta}, X_i\right) &< 0 \\ \mathcal{L}\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{\eta}, X_{i+1}\right) &< 0 \\ (X_0, X_{n_\phi}) &\in \Omega \end{aligned}$$

para todo $i = 0, \cdots, n_\phi - 1$.

Controle amostrado

- **Controle amostrado:** Segurador de ordem zero

$$u \in \mathbb{U} \iff u(t) = \underbrace{u[k]}_{u(t_k)}, \ \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \ \forall k \in \mathbb{N}$$

  - $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ otimização com $u \in \mathbb{U}$
  - Três livros importantes:

[5] J. R. Ragazzini, and G. F. Franklin, **McGrawHill Series in Control Systems Engineering**, 1958.

[6] T. Chen, and B. A. Francis, **Springer**, 1995.

[7] A. Ichicawa, and H. Katayama, **Springer**, 2001.

  - Um artigo recente:

[8] J. C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern, **Automatica**, 2019.

Controle amostrado

- Sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_c w_c(t)$$
$$z(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$u(t) = \underbrace{Lx[k]}_{u[k]} + E_d w_d[k-1], \;\; t \in [t_k, t_{k+1}), \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

- $x(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x}$ - estado
- $z(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_z}$ - saída controlada
- $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_u}$ - controle via realimentação de estado: $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$
- $w_c(\cdot) \in \mathbb{R}^{r_c}$ - perturbação exógena
- $w_d[\cdot] \in \mathbb{R}^{r_d}$ - perturbação exógena

Controle amostrado

- **Proposição:** Considere $h > 0$ dado. O sistema de controle amostrado é assintoticamente estável e o índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ resulta da solução ótima do problema de otimização convexo

$$J_2 = \inf_{P(\cdot)} \left\{ \mathbf{tr}(J_c{}' P(h) J_c) + \mathbf{tr}(J_d{}' P(0) J_d) \right\}$$

sujeito a

$$\dot{P}(t) + F' P(t) + P(t) F + G' G < 0$$

com a condição de contorno

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(h) & H' \\ \bullet & P(0)^{-1} \end{bmatrix}}_{controlador} > 0$$

Controle amostrado

- As matrizes J_c, J_d, F e G dependem apenas das matrizes do sistema em malha aberta!
- DLMI permite considerar incertezas paramétricas
- O controle ótimo $\mathcal{H}_2$ resulta da solução do problema

$$\inf_{L,P(\cdot)} \left\{ \mathbf{tr}(J_c' P(h) J_c) + \mathbf{tr}(J_d' P(0) J_d) \right\} \quad \rightarrow \quad \textit{CONVEXO}$$

- Os resultados são válidos para a síntese de controladores dinâmicos de ordem completa

Controle amostrado

- **Proposição:** Considere $h > 0$ dado. O sistema de controle amostrado é assintoticamente estável e o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ resulta da solução ótima do problema de otimização convexo

$$J_\infty = \inf_{P(\cdot),\gamma} \gamma^2$$

sujeito a

$$\dot{P}(t) + F'P(t) + P(t)F + \gamma^{-2}P(t)J_cJ_c'P(t) + G'G < 0$$

com a condição de contorno

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P(h) & H' & 0 \\ \bullet & P(0)^{-1} & J_d \\ \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix}}_{controlador} > 0$$

Controle amostrado

- As matrizes J_c, J_d, F e G dependem apenas das matrizes do sistema em malha aberta!
- O controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ resulta da solução do problema

$$\inf_{L,P(\cdot),\gamma} \left\{ \gamma^2 \ : \ \underbrace{\begin{bmatrix} P(h) & H' & 0 \\ \bullet & P(0)^{-1} & J_d \\ \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix}}_{controlador} > 0 \right\}$$

$$\Downarrow$$

CONVEXO

- Os resultados são válidos para a síntese de controladores dinâmicos de ordem completa

Controle preditivo

- Características principais de grande impacto:
  - Controle em malha fechada com estabilidade assegurada
  - Restrições nas variáveis de controle e de estado
- Preço a ser pago (quase sempre):
  - Horizonte de otimização finito com custo final
  - Técnica restrita ao controle de sistemas a tempo discreto!
- Três artigos importantes:

[9] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, **Automatica**, 1996.

[10] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert, **Automatica**, 2000.

[11] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari, **IEEE Trans. Autom. Control**, 2002.

- Um artigo recente:

[12] J. C. Geromel, **IEEE Trans. Autom. Control**, 2021.

Controle preditivo

- Sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0$$
$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t)$$
$$y[k] = C_y x[k] + D_y u[k]$$

  - Controle amostrado - $u(t) \in \mathbb{U}$

$$u(t) = u[k],\ t \in [t_k, t_{k+1}),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

  - Restricões no controle e no estado - $y[k] \in \mathbb{Y}$ CONVEXO
  - Incertezas paramétricas

$$(A, B) \in \mathrm{co}\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{N}$$

  - Critério de desempenho $\mathcal{H}_2$

$$J_2 = \int_{t_k}^{\infty} \|z(t)\|^2 dt,\ x(t_k) = x_{k|k}$$

Controle preditivo

- As matrizes $\{F_i\}_{i=1}^{N}$, G, D_ψ e I_x dependem apenas das matrizes do sistema em malha aberta!
- Para todo $k \in \mathbb{N}$, o controle ótimo $u[k] = L_{(k)} x_{k|k}$ resulta da solução do problema convexo

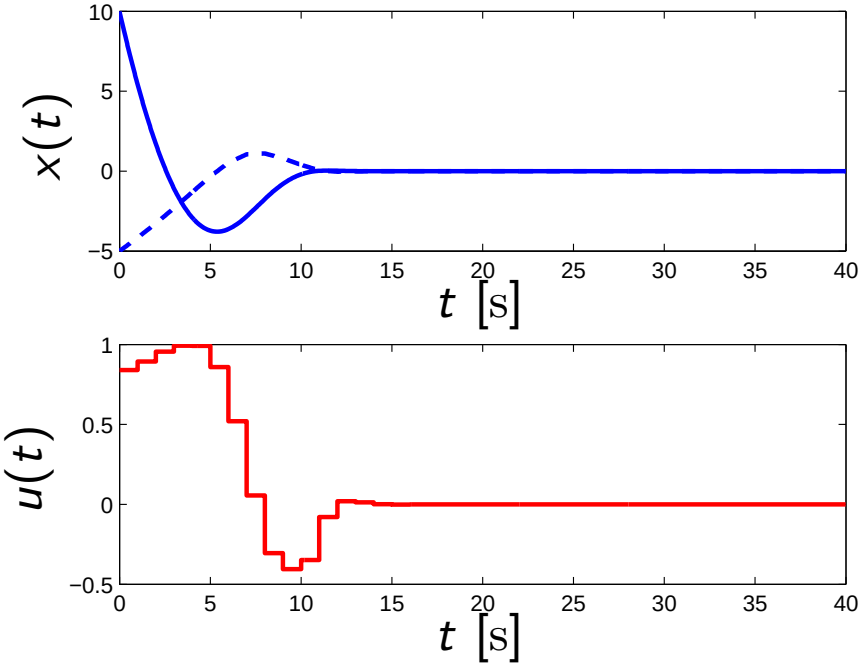
$$\min_{Q(\cdot), Q_0>0, Q_h>0, \theta>0} x'_{k|k} \left(I'_x Q_0 I_x \right)^{-1} x_{k|k}$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{Q}(t) + F_i Q(t) + Q(t) F'_i & Q(t) G' \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \;\; i = 1, \cdots, N$$

$$\begin{aligned} I'_x (Q_0 - Q_h) I_x &> 0 \\ \theta I - D_\psi Q_0 D'_\psi &> 0 \\ I'_x Q_0 I_x - \theta x_{k|k} x'_{k|k} &> 0 \end{aligned}$$

Exemplo

- Exemplo proposto na literatura



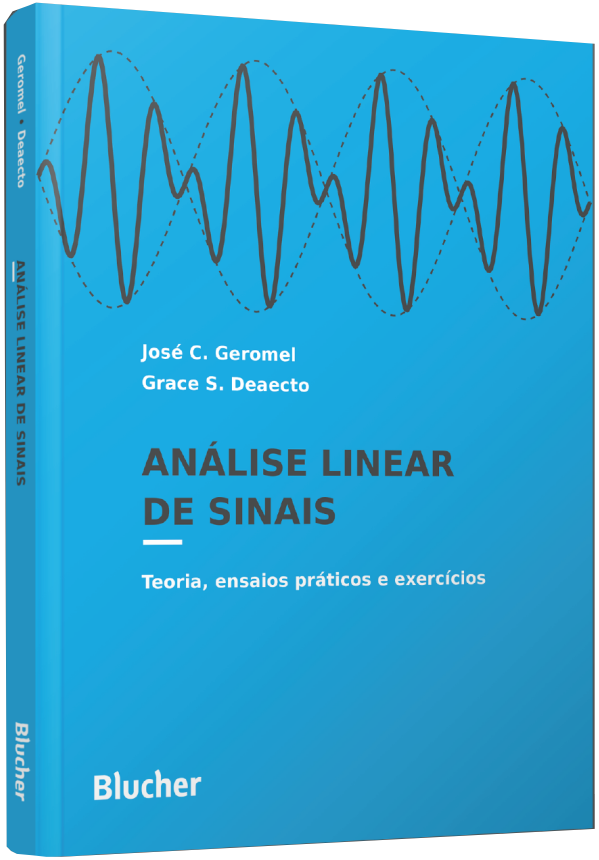
com $h = 1$ [s] e a restrição $|u[k]| \leq 1$

O futuro próximo ...

- **Em quais temas dedicar maior esforço:**
  - **Controle via realimentação de saída:** no contexto de sistemas lineares com saltos Markovianos
  - **Controle** $\mathcal{H}_\infty$ no contexto de controle preditivo
  - **Amostragem não uniforme**

Agradecimento

Agradeço a atenção de todos !!!



https://www.blucher.com.br